ISBN: 978-958-8943-39-8

Elementos Básicos **de Matemáticas** con Herramientas **Interactivas**

UNIVERSIDAD CATÓLICA LUIS AMIGÓ
FONDO Editorial UNIVERSIDAD CATÓLICA LUIS AMIGÓ

Andrés Mauricio Grisales Aguirre

Elementos Básicos **de Matemáticas** con Herramientas **Interactivas**

Andrés Mauricio Grisales Aguirre

Grisales Aguire, Andrés Mauricio

Elementos Básicos de Matemáticas con Herramientas Interactivas [Recurso electrónico] / Andrés Mauricio Grisales Aguire. --Diagramación y diseño Jonathan Arias Rúa; coordinadora editorial Carolina Orrego Moscoso . -- Medellín : Universidad Católica Luis Amigó, 2018
199 p.

MATEMÁTICAS; UNIVERSIDAD CATÓLICA LUIS AMIGÓ - MATEMÁTICAS - PUBLICACIONES; ALGEBRA; LÓGICA MATEMÁTICA; MATEMÁTICAS - SOFTWARE ; GEOGEBRA - SOFTWARE; SYMBOLAB - SOFTWARE; WOLFRAMALPHA – SOFTWARE.

CD-511.3 G869

ELEMENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICAS CON HERRAMIENTAS INTERACTIVAS

Transversal 51A 67B 90. Medellín, Antioquia, Colombia
Tel: (574) 448 76 66
www.ucatolicaluisamigo.edu.co – fondo.editorial@amigo.edu.co

ISBN: 978-958-8943-39-8

Fecha de edición: 5 de julio de 2018

Autor: Andrés Mauricio Grisales Aguirre

Grupo de pares: María Teresa Vargas Moreno, Ph. D. en Pensamiento Complejo. Universidad EAN
Elgar Gualdrón Pinto, Ph.D. en Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Pamplona

Corrector de estilo: Juan Carlos Rodas

Diagramación y diseño: Jonathan Arias Rúa

Edición: Fondo Editorial Universidad Católica Luis Amigó

Coordinadora Editorial: Carolina Orrego Moscoso

Hecho en Colombia / Made in Colombia

Publicación financiada por la Universidad Católica Luis Amigó

El autor es moral y legalmente responsable de la información expresada en este libro, así como del respeto a los derechos de autor; por lo tanto, no compromete en ningún sentido a la Universidad Católica Luis Amigó.

Declaración conflictos de interés: el autor de esta publicación declara la inexistencia de conflictos de interés de cualquier índole con instituciones o asociaciones comerciales.

Para citar este libro siguiendo las indicaciones de la tercera edición en español de APA:
Grisales Aguirre, A. M. (2018). *Elementos Básicos de Matemáticas con Herramientas Interactivas*. Medellín, Colombia: Fondo Editorial Universidad Católica Luis Amigó.

A Santi... protege tus sueños.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

1. TEORÍA DE CONJUNTOS 14

1.1 Definiciones iniciales 14
1.2 Relaciones entre conjuntos 16
1.3 Operaciones entre conjuntos 17
1.4 Diagramas de Venn – Euler 19
1.5 Aplicaciones de los conjuntos en la solución de problemas 20
1.6 Ejercicios de práctica I 23
1.7 Matemáticas en la web 26

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS 29

2.1 Números Naturales 29
2.2 Los números enteros 38
2.3 Los números racionales 40
2.4 Los números irracionales 43
2.5 Suma y resta de números reales 45
2.6 Multiplicación y división de números reales 50
2.7 Propiedades de las operaciones con números reales 51
2.8 Potenciación de números reales 53
2.8.1 Radicación y exponentes fraccionarios 56
2.9 Logaritmación 60
2.10 Ejercicios de práctica II 62
2.11 Matemáticas y TIC 66

3. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS 70

3.1 Clasificación de expresiones algebraicas 71
3.2 Términos semejantes y reducción de términos semejantes 71
3.3 Suma de polinomios 73
3.4 Resta de polinomios 74
3.5 Multiplicación de expresiones algebraicas 76
3.6 División de polinomios 78
3.7 Ejercicios de práctica III 81
3.8 Matemáticas y TIC 84

4. FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS 87

4.1 Factor común en expresiones algebraicas 87

4.2 Factorización de binomios 89

4.2.1 Diferencia de cuadrados perfectos 89

4.2.2 Suma o diferencia de cubos perfectos 90

4.3 Factorización de trinomios 92

4.3.1 Trinomio cuadrado perfecto 92

4.3.2 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ 94

4.3.3 Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ 95

4.4 Factorización de polinomios 96

4.4.1 Cubo de un binomio 96

4.4.2 Factor común por agrupación de términos 99

4.5 Factorización completa 101

4.6 Ejercicios de práctica IV 102

4.7 Matemáticas y TIC 105

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS 108

5.1 Suma y resta de fracciones algebraicas 109

5.2 Multiplicación de fracciones algebraicas 110

5.3 División de fracciones 111

5.4 Racionalización de fracciones 113

5.5 Ejercicios de práctica V 115

5.6 Matemáticas en la web 117

6. ECUACIONES LINEALES 119

6.1 Problemas de aplicación 124

6.2 Ejercicios de práctica VI 126

6.3 Matemáticas y TIC 129

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 132

7.1 Método de solución por suma o resta 133

7.2 Método de sustitución 134

7.3 Método de igualación 135

7.4 Ejercicios de práctica VII 137

7.5 Matemáticas y TIC 139

8. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 142

8.1 Método de factorización 142
8.2 Método de la fórmula general 143
8.3 Método de completación al cuadrado 146
8.4 Ejercicios de práctica VIII 148
8.5 Matemáticas en la web 150

9. DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES 152

9.1 Relación de orden en los reales 152
9.2 Propiedades de las desigualdades 153
9.3 Intervalos de números reales 154
9.4 Ejercicios de práctica IX 161
9.5 Matemáticas en la web 162

10. REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN EL PLANO CARTESIANO 165

10.1 Distancia entre dos puntos 166
10.2 Gráfica de ecuaciones 167
10.3 Líneas rectas 168
10.4 Ecuación de la recta: Forma punto – pendiente 169
10.5 Ecuación de la recta: Pendiente – ordenada en el origen 170
10.6 Ecuaciones de la Parábola 171
10.7 Ecuaciones de la circunferencia 175
10.8 Ecuaciones de la elipse 178
10.9 Ecuaciones de la hipérbola 181
10.10 Ejercicios de práctica X 184
10.11 Matemáticas y TIC 187

REFERENCIAS 192

APÉNDICE I: DESCARGA E INSTALACIÓN DE GEOGEBRA 196

APÉNDICE II: DESCARGA E INSTALACION DE MICROSOFT MATHEMATICS 4.0 197

INFORMACIÓN DEL AUTOR 199

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Este texto se ha escrito con la intención de brindarles a los estudiantes de primer semestre de cualquier programa de pregrado, una guía para el desarrollo de los cursos de matemáticas básicas o fundamentales. Si bien la disponibilidad de material en esta asignatura ha ido aumentando en los últimos años, se ha considerado pertinente por parte del autor hacer una recopilación de los temas básicos que un estudiante de pregrado debe conocer en el área de matemáticas y que lo preparen para el desarrollo de cursos posteriores, no solo en la misma línea de esta asignatura, sino también en aquellos cursos donde esta es una herramienta fundamental para su desarrollo, tales como economía, contabilidad, matemática financiera y cursos de ingeniería. La intención principal ha sido mostrar estos elementos, explicados de la manera más sencilla posible de modo que los estudiantes puedan seguirle el hilo al desarrollo de las temáticas, puedan solucionar los ejercicios propuestos y abordar con seguridad el estudio de textos más complejos en su área o disciplina de estudio.

Una de las características más notorias de este texto y que lo puede diferenciar de muchos otros con el mismo contenido y propósito, es la inclusión de unos apartados al final de cada capítulo, denominados ***Matemáticas y TIC y Matemáticas en la Web***. Si bien cada uno de los procesos de la competencia matemática pueden ser llevados a cabo con o sin la ayuda del computador, no se puede desconocer el hecho de que cuando se involucran herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, los estudiantes encuentran una mayor motivación para el abordaje de las distintas temáticas propuestas, los aprendizajes que se logran son realmente significativos y los docentes cuentan con un sinnúmero de recursos didácticos que hacen más fácil la instrucción de los contenidos y el seguimiento detallado del aprendizaje alcanzado por sus estudiantes.

En este orden de ideas, se presenta en primer lugar, ***Matemáticas y TIC***, como una sección complementaria para algunos capítulos, que muestra la manera de aplicar unos programas informáticos de libre descarga a la solución de ejercicios de las respectivas temáticas desarrolladas.

El primero de estos programas es *GeoGebra*, el cual es definido en su sitio oficial como “un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo en un solo programa fácil de usar” (Geogebra, 2016). Este programa se ha vuelto muy popular en los últimos años en los procesos de enseñanza de la matemática –en distintos niveles– como herramienta de apoyo para la integración de esta materia con recursos tecnológicos, gracias a que su interfaz es muy intuitiva y dispone de una gran variedad de recursos en línea desarrollados por múltiples usuarios y que pueden ser descargados y visualizados de manera libre. Ha sido merecedor de importantes premios desde el 2002, incluido el reconocimiento *Archimedes 2016* de la Asociación para la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (MNU) de Alemania a las ideas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas y la física (MNU, 2016).

Por otro lado, aparece el software *Microsoft Mathematics,* antes conocido como *Microsoft Math*. Este complemento de *Microsoft Windows* es un software educativo de licencia gratuita, que permite a los usuarios resolver problemas matemáticos de distinto orden, desde operaciones simples hasta la solución de operaciones complejas de álgebra, geometría y cálculo. Este programa funciona como una calculadora científica avanzada con el que se puede solucionar ecuaciones de distintos grados, sistemas de ecuaciones y se pueden representar gráficamente en 2D o en 3D distintas expresiones matemáticas.

Lanzado al medio en el 2006 como complemento del paquete *Microsoft Student*, hoy se puede descargar libremente desde el sitio oficial de *Microsoft* y está disponible para versiones de 32 y 64 bit (Microsoft, 2016).

Los procedimientos de descarga e instalación de estos programas se muestran en el Apéndice II.

Las secciones ***Matemáticas en la Web*** contienen una propuesta para trabajar con recursos informáticos en línea a los que tanto estudiantes, como docentes, pueden acceder libremente desde cualquier recurso electrónico con conexión a internet, incluidos dispositivos móviles. En este texto se muestran particularmente algunas de las herramientas de dos proyectos interactivos de alto impacto y utilidad.

En primer lugar está el proyecto WolframAlpha de la compañía Wolfram Alpha LLC-A Wolfram Research Company, el cual presenta una forma de resolver problemas mediante cálculos dinámicos a partir de la colección de datos, algoritmos y métodos que incorpora en su plataforma Web (WolframAlpha, 2016). Entre varios de los módulos que involucra está el de matemáticas, que integra herramientas de gran utilidad para manipular expresiones desde operaciones básicas hasta problemas avanzados de matemática aplicada y problemas famosos.

Para acceder a este módulo se sigue el siguiente procedimiento:

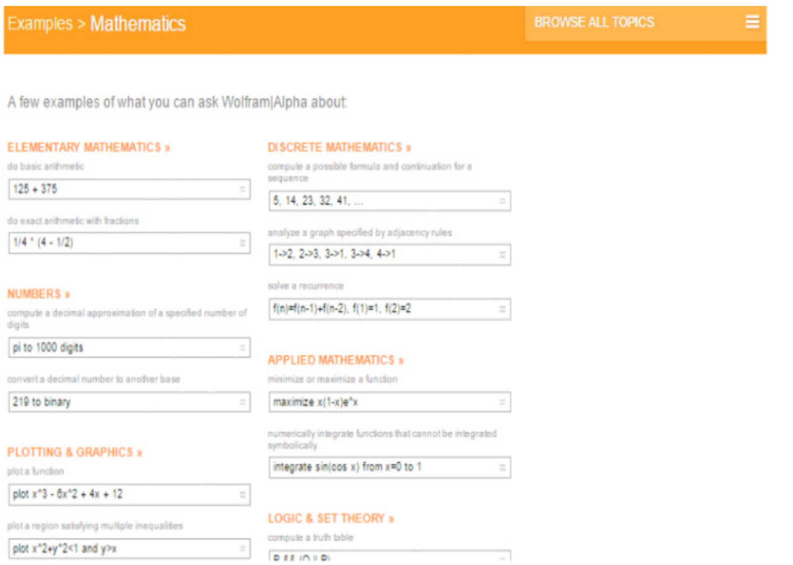
1. Ingresar a la página principal del sitio mediante la dirección http://www.wolframalpha.com/
2. La ventana inicial ofrece estos módulos para trabajar (ver figura 1):

Figura 1 Pantalla inicial WolframAlpha

Nota: tomada del sitio web www.wolframalpha.com (2017)

3. Dando clic en el módulo de matemáticas aparecen múltiples opciones, tales como las que se muestran en la figura 2.

Figura 2. Opciones del módulo de matemáticas

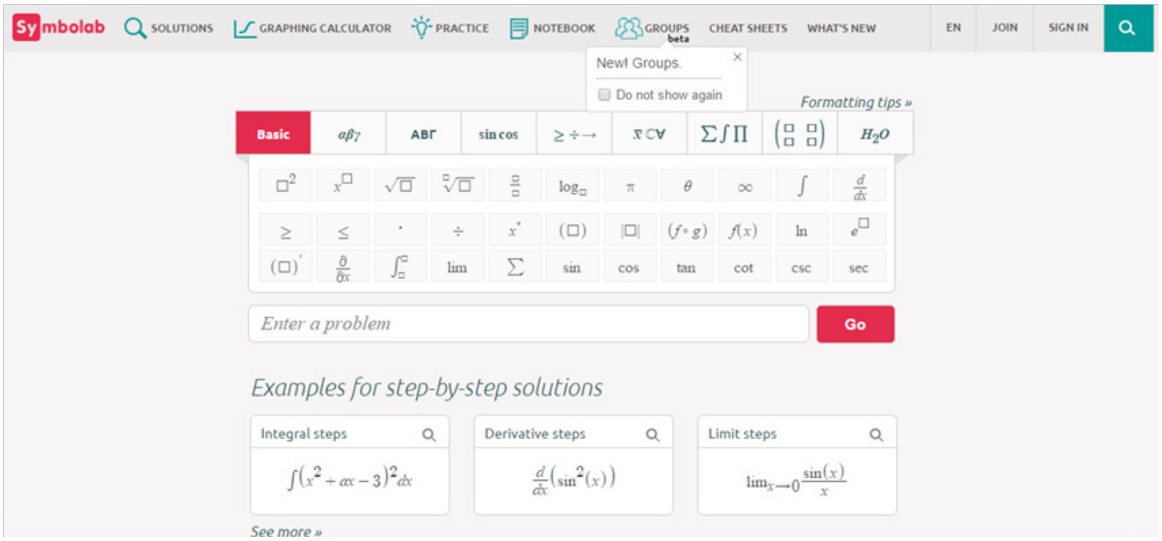


Nota: tomada del sitio web www.wolframalpha.com (2017)

Otro proyecto de matemáticas en la web es el entorno interactivo *Symbolab*. Este entorno de trabajo en línea, se presenta como una opción para practicar las matemáticas desde diversos temas utilizando notación simbólica de muy fácil manejo y construcción para resolver desde problemas de matemática intermedia, hasta temas de matemática superior, proporcionando soluciones tanto analíticas, como gráficas (si es el caso), y con la posibilidad de revisar paso a paso la construcción de estas soluciones (ver figura 3).

1. Para ingresar al entorno se digita la opción https://www.symbolab.com/
2. La primera ventana del programa muestra el panel de entrada de expresiones matemáticas, la opción de resolver un problema que va desde la realización de operaciones fundamentales hasta la solución de límites, derivadas e integrales y presenta también la opción de explorar otras herramientas del programa como la solución de problemas de álgebra, geometría, trigonometría y estadística, entre otros. Permite también explorar ejemplos resueltos de diversos temas y la elaboración de gráficas (Symbolab, 2016).

Figura 3. Pantalla inicial de ***Symbolab***



Nota: tomada del sitio web www.symbolab.com (2017)

El autor agradece todas las opiniones y sugerencias que puedan surgir de parte de quienes se adentren a los contenidos de este texto y que tengan a bien mejorar la presentación de los temas y en general, proporcionar una herramienta que permita tanto a estudiantes y a docentes, desvirtuar la idea de las matemáticas como una materia de difícil comprensión y acceso y en cuyos laberintos se puede vivir la magia de entender el lenguaje en el cual está escrito el universo.

ANDRÉS MAURICIO GRISALES AGUIRRE

MSc – Matemática Aplicada

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 Definiciones iniciales
1.2 Relaciones entre conjuntos
1.3 Operaciones entre conjuntos
1.4 Diagramas de Venn – Euler
1.5 Aplicaciones de los conjuntos en la solución de problemas
1.6 Ejercicios de práctica I
1.7 Matemáticas en la web

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

Uno de los primeros conceptos matemáticos con el que se tiene contacto en varios contextos de formación es la noción de conjunto. Este concepto y toda la teoría que la sustenta conforman un compendio de tratados tan amplios y complejos en su construcción, que sobrepasarían la intención ilustrativa y práctica del presente texto. Sin embargo, al ser una de las ideas más intuitivas de la matemática y que se establece como punto de partida para teorías que se desarrollan posteriormente en cursos superiores de esta área, es importante dar a conocer al lector algunos de los elementos básicos de esta teoría. Para aquellos que deseen profundizar sobre el tema, el texto de Pinter (2014) ofrece una gran variedad de definiciones más profundas y un desarrollo más exhaustivo de esta temática.

1.1 Definiciones iniciales

Conjunto

En Winsniewski y Gutiérrez Banegas (2003) se establece que "un conjunto es una colección o lista de objetos bien definidos. Los objetos que conforman un conjunto se denominan elementos" (p. 5). El ejemplo 1.1 muestra algunas de las situaciones cotidianas en donde se puede aplicar la idea de conjunto.

Ejemplo 1.1

Los siguientes son ejemplos de conjuntos:

- El conjunto de todos los canales de TV de la televisión abierta.
- El conjunto de los números primos entre 0 y 100.
- El conjunto de las letras que forman la palabra *Matemática*

Elemento de un conjunto

Si A es un conjunto arbitrario y *x* es un elemento que forma parte de dicho conjunto, la expresión $x \in A$ significa que "*x pertenece o es elemento del conjunto A*". Para denotar que *x* no es un elemento del conjunto A, se escribe $x \notin A$ (Winsniewski y Gutiérrez, 2003). El **cardinal de un conjunto A** que se denotará por $n(A)$ corresponde al número de elementos que conforman el conjunto *A.*

Representación de conjuntos

La representación de conjuntos se establece con el fin de conocer los elementos que forman parte de un conjunto dado. Esta representación se puede hacer de dos formas básicas:

i. **Por extensión** que consiste en dar a conocer todos los elementos del conjunto.

ii. **Por comprensión,** que consiste en proporcionar una regla que identifica todos los elementos del conjunto sin que se requiera mostrar cada uno de ellos (Winsniewski y Gutiérrez, 2003)

El siguiente ejemplo ilustra estas dos formas de representación:

Ejemplo 1.2

Se define el conjunto A como el conjunto de todos los números naturales que son múltiplos de 2. Describir el conjunto *A* por extensión y por comprensión.

$$A = \{\text{Todos los números que son múltiplos de 2}\}$$

1. La representación del conjunto *A* por extensión es la que sigue:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

2. La representación por comprensión correspondiente al conjunto *A* es la que sigue:

$$A = \{x : x = 2n, n \in N\}$$

En esta representación puede leerse como: “A es el conjunto de todos los elementos *x* tales que *x* es igual a *2n* con *n* tomando valores en el conjunto de los números Naturales”.

Conjunto vacío

Un **conjunto vacío** es aquel que no tiene elementos. Se denota con el símbolo ϕ (Mejía, Álvarez y Fernández, 2005). Una forma alternativa de denotar el conjunto vacío es mediante la expresión $A = \{\ \}$. En este caso, *A* es un conjunto que no tiene elementos (vacío). No debe confundirse el conjunto $A = \{\ \}$ con el conjunto $A = \{\phi\}$; el primero corresponde al conjunto vacío, el segundo corresponde al conjunto **unitario** cuyo único elemento es la letra ϕ, por tanto, no es un conjunto vacío.

1.2 Relaciones entre conjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B* arbitrarios se pueden establecer algunas relaciones básicas entre ellos, entre las cuales se tienen la relación "*…es subconjunto de…*" o relación de contenencia y la relación de igualdad.

Relación de contenencia entre conjuntos

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B (o está incluido en B) si todo elemento del conjunto A es a su vez un elemento del conjunto B. Esta relación se denota con la expresión $A \subseteq B$ que se lee "A es subconjunto de B", "A está incluido en B", "A está contenido en B" o "B contiene a A" (Mejía et al., 2005).

La relación de contenencia entre conjuntos permite establecer que:

i. Todo conjunto es al mismo tiempo subconjunto de sí mismo.

ii. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Subconjunto propio

Se dice que el conjunto A es **subconjunto propio** del conjunto B, si B tiene al menos un elemento más que el conjunto A. Esta relación se denota con la expresión $A \subset B$ que se lee "*A es subconjunto propio de B*" (Mejía et al., 2005).

El ejemplo 1.3 ilustra estas relaciones entre conjuntos.

Ejemplo 1.3

Sean $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$. Como todos los elementos de A son elementos de B y B tiene un elemento más que A, entonces se puede establecer que $A \subset B$.

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos *A* y *B* se dicen **iguales** si todo elemento del conjunto A es a su vez elemento del conjunto B y al mismo tiempo todo elemento del conjunto B es elemento del conjunto A. La relación de igualdad entre los conjuntos *A* y B se denota con la expresión $A = B$ que se lee "*A es igual a B*" (Mejía et al., 2005).

Ejemplo 1.4

$A=\{1,2,3\}$ y $B=\{3,2,1\}$ son conjuntos iguales. Claramente todo elemento del conjunto *A* es a su vez elemento del conjunto *B* y viceversa.

Otra forma de expresar la igualdad entre los conjuntos *A* y *B* es diciendo que $A=B$ si se cumple que $A\subseteq B$ y al mismo tiempo que $B\subseteq A$. En términos más formales esta relación se expresa mediante la proposición "$A=B$ sí y solamente sí $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$" (Pinter, 2014, p. 72).

Conjunto universal

Se dice que el **conjunto universal** es aquel conjunto que contiene todos los elementos que interesan en una situación determinada. Se puede decir también que el conjunto universal es el conjunto de todos los conjuntos (Barwise, 1977). El conjunto universal se denota usualmente con la letra U.

Ejemplo 1.5

Si $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{4,6,8\}$ y $C=\{5,7,9\}$ son los conjuntos que interesan entonces un posible conjunto universo es $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Sin embargo, si se quiere, se puede decir que $U=N$ (el conjunto de todos los números naturales). De igual manera se puede establecer que U sea el conjunto de todos los números enteros, todos los números racionales o todos los números reales. Lo que se debe garantizar en cada caso es que el conjunto universal contenga todos los conjuntos que son de interés.

1.3 Operaciones entre conjuntos

Considérense A y B dos conjuntos arbitrarios; entre estos conjuntos se definen las siguientes operaciones:

Unión de conjuntos

La **unión de los conjuntos A y B** es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A, que pertenecen al conjunto B o que pertenecen a los dos conjuntos al mismo tiempo (Mejía et al., 2005). En símbolos esta operación se representa mediante la expresión

$$A\cup B=\{x:x\in A\vee x\in B\}$$

Esta expresión puede leerse como: "*A unión B es el conjunto formado por todos los elementos x tales que x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B*". El símbolo $\vee$ (que se lee "o") utilizado en esta notación corresponde al conector lógico conocido como disyunción en la lógica proposicional. Para un estudio más explícito de este tema se recomienda estudiar el texto de Pinter (2014).

Intersección entre conjuntos

La **intersección de los conjuntos A y B** es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B al mismo tiempo (Mejía et al., 2005). En símbolos esta operación se representa mediante la expresión,

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

que se lee: "*A intersección B es el conjunto de los x tales que x pertenece a A y x pertenece a B*". El símbolo $\wedge$ que se usa en esta definición y que se lee como "y" corresponde al conector lógico de la proposición conocida como conjunción. Ver Pinter (2014) para más detalles.

Si $A \cap B = \phi$ se dice que A y B son **disjuntos** (mutuamente excluyentes).

Diferencia entre conjuntos

La **diferencia entre los conjuntos A y B** es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A, pero que no pertenecen al conjunto B (Mejía et al., 2005). En símbolos esta operación se escribe así:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

que se lee "*A menos B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece al conjunto A y x no pertenece al conjunto B*".

Complemento de un conjunto

El **complemento del conjunto A** es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen al conjunto A pero que si pertenecen al conjunto universal (Mejía et al., 2005, p. 42). Dado el conjunto *A*, su complemento se denota como A^c o A'.

Diferencia simétrica entre conjuntos

La **diferencia simétrica** entre los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B, pero que no están en los dos al mismo tiempo (Mejía et al., 2005, p. 42). En símbolos esta operación se escribe

$$A \Delta B = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Ejemplo 1.6

Considere el conjunto $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$ y sean $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{d,e,f,g\}$ y $C=\{i,j,k\}$. Con base en estos conjuntos se tiene que:

i. $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

ii. $A\cap B=\{d,e\}$

iii. $A\cap C=\{\ \}$

iv. $A-B=\{a,b,c\}$

v. $B-A=\{f,g\}$

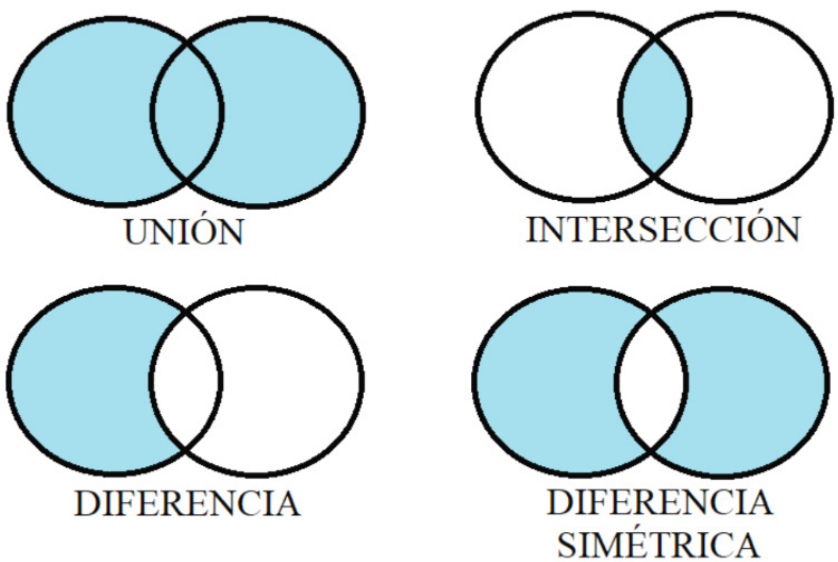
vi. $A^c=\{f,g,h,i,j,k\}$

vii. $A\Delta B=\{a,b,c,f,g\}$

1.4 Diagramas de Venn – Euler

Los diagramas de Venn – Euler ofrecen un método gráfico para representar los conjuntos y sus relaciones (Mejía et al., 2005). Los siguientes diagramas de Venn – Euler ilustran las operaciones descritas anteriormente (ver figura 4).

Figura 4. Representación gráfica operaciones entre conjuntos



Fuente de la imagen: Elaboración propia.

1.5 Aplicaciones de los conjuntos en la solución de problemas

Existen muchas situaciones de la vida cotidiana que pueden ser resueltas aplicando la teoría de conjuntos, en particular las operaciones entre conjuntos. A continuación se presentan algunas de estas situaciones y uno de los métodos que se pueden utilizar para su solución.

Ejemplo. 1.7

En un congreso asisten 300 personas de distintas regiones del país; 110 son hombres asistentes, 120 son asistentes del interior del país y 50 son hombres costeños. Calcule el número de asistentes que son:

a. Mujeres.

b. Mujeres costeñas.

c. Mujeres del centro.

Solución

Sean los conjuntos:

$$U = \{Asistentes\ al\ congreso\}$$

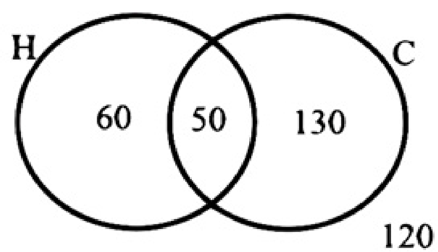
$$H = \{Hombres\}$$

$$C = \{Participantes\ de\ la\ costa\}$$

$$H \cap C = \{Hombres\ Costeños\}$$

Se determinan los cardinales de cada uno de los conjuntos definidos y se dibuja el diagrama de Venn–Euler correspondiente (ver figura 5).

Figura 5. Diagrama Venn – Euler. Ejemplo 1.7



Fuente de la imagen: Elaboración propia

$$n(U) = 300$$
$$n(H) = 110$$
$$n(C^c) = 120$$
$$n(H \cap C) = 50$$

De acuerdo con el diagrama se tiene que:

a. son mujeres $n(H^c) = 250$

b. son mujeres costeñas: $n(H^c \cap C) = 130$

c. son mujeres del interior: $n(H^c \cap C^c) = 120$

Ejemplo 1.8

Se realizó una encuesta a 153 personas para saber su preferencia deportiva respecto a los equipos de España, Barcelona y Francia:

- 53 dijeron que les gustaba España.
- 53 dijeron que les gustaba Barcelona.
- 53 dijeron que les gustaba Francia.
- 23 dijeron que les gustaban España y Barcelona.
- 23 les gusta España y Francia
- 20 dijeron que les gustaba solo Francia.
- 13 les gustan los tres equipos.

Determinar:

a. ¿Cuántas personas prefieren solo uno de los equipos?

b. ¿Cuántas personas prefieren solo dos equipos?

c. ¿Cuántas personas no prefieren ninguno de los tres equipos?

Solución

Sean

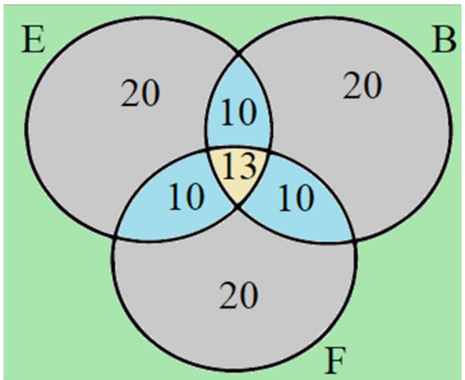
$$U = \{Personas\ Encuestadas\}$$
$$E = \{Personas\ que\ prefieren\ España\}$$

$$B = \{Personas\ que\ prefieren\ Barcelona\}$$
$$F = \{Personas\ que\ prefieren\ Francia\}$$

Se determinan los cardinales y se realiza el diagrama de Venn – Euler.

$$n(U) = 300 \qquad n(E \cap B) = 23$$
$$n(E) = 53 \qquad n(E \cap F) = 23$$
$$n(B) = 53 \qquad n(E \cap F \cap B) = 13$$
$$n(F) = 53$$

Figura 6: Representación gráfica ejemplo 1.8



Fuente de la imagen: Elaboración propia.

Resolviendo:

a. Hay 20 personas que prefieren solo España, 20 Francia y 20 Barcelona, por tanto, 60 personas prefieren uno solo de los equipos.

b. Hay 10 personas que prefieren solo España y Barcelona, 10 Francia y Barcelona y 10 prefieren España y Francia, por tanto, 30 personas prefieren solo dos de los equipos.

c. 50 personas no prefieren ninguno de los tres equipos mencionados.

1.6 Ejercicios de práctica I

1. Sean los conjuntos $A=\{a,b,c,d,e\}$; $B=\{d,e,f,g\}$; $C=\{g,h,i,j\}$; $D=\{k,l,m,n\}$; y $U=\{x : x \text{ es una letra del abecedario}\}$. Con base en estos conjuntos hallar:

   a. $A\cup B$
   b. $A\cup C$
   c. $A\cup D$
   d. $A\cap B$
   e. $A\cup U$
   f. $B\cap D$
   g. $A-B$
   h. $B-A$
   i. $A';B';C';D';U'$
   j. $A'\cap B'$
   k. $(A\cap B)'$
   l. $(A\cup B)$
   m. $(A\cup B)'$
   n. $(A\cup B)\cap C$
   o. $(A\cap C)\cup(B\cap C)$
   p. $A\cap U$

2. Sean A el conjunto de los números en forma $3n+2, n\in N$ y B el conjunto de los números pares, ¿son A y B mutuamente excluyentes?

3. Sean A el conjunto de los números naturales divisibles entre 6, B el conjunto de los números naturales divisibles entre 2 y C el conjunto de los números naturales divisibles entre 3. Encuentre:

   a. $A\cup B$
   b. $A\cup C$
   c. $B\cup C$
   d. $A\cap B$
   e. $A\cap C$
   f. $B\cap C$
   g. $A-C$
   h. $A-B$
   i. $B-A$
   j. $A\cup B\cup C$
   k. $A\cap B\cap C$

4. Sean A el conjunto de los números de la forma $4n+3, n\in N$ y B el conjunto de los números de la forma $4n-3, n\in N$. Encuentre el conjunto $B-A$.

5. Sean A el conjunto de los números impares y B el conjunto de los números de la forma $6n+1, n\in N$ Encuentre $A\cup B$ y $A\cap B$.

6. Sean A el conjunto de los números impares y B el conjunto de los números de la forma $4n, n \in N$. Encuentre $A \cap B$.

7. Determine bajo qué condiciones son verdaderas las igualdades:

   a. $A \cup B = A \cap B$ b. $(A \cup B) - B = A$ c. $A \cap A^C = A$

8. De una encuesta aplicada a 60 estudiantes de una universidad, se supo que 9 son de Administración de Empresas, 36 son de Derecho y 3 son de ambos programas. Determine el número de:

   a. Estudiantes de Administración o de Derecho.

   b. Estudiantes de Administración únicamente.

   c. Estudiantes de Derecho únicamente.

9. En una competencia participaron 270 estudiantes. El número de los que participaron en tenis, baloncesto y fútbol es el siguiente:

   90 en fútbol.

   90 en tenis.

   90 en baloncesto.

   30 participaron en fútbol y baloncesto.

   30 participaron en fútbol y tenis.

   30 participaron en tenis y baloncesto.

   10 participaron en los tres.

Determine el número de estudiantes que:

a. Participaron en al menos uno de los deportes.

b. Participaron únicamente en dos tipos de deportes.

c. No participaron en ninguno de los tres deportes.

10. En una encuesta realizada a 145 estudiantes de una universidad para determinar las preferencias de lecturas, se encontró lo siguiente:

    59 leen literatura universal.

    83 leen ciencia ficción.

    21 leen ciencia ficción y novelas, pero no literatura universal.

15 leen novelas y literatura universal, pero no ciencia ficción.

12 leen ciencia ficción y literatura universal, pero no leen novelas.

13 leen exclusivamente novelas.

41 leen ciencia ficción y novelas, pero no de forma exclusiva.

Determine el número de personas que:

a. Leen solamente uno de los géneros.

b. Leen los tres géneros.

c. Leen otros géneros diferentes a los mencionados.

11. Se revisó el uso del transporte de 48 empleados de una oficina. Las respuestas fueron:

35 usan autobús.

8 caminan y usan autobús, pero nunca taxi.

6 usan exclusivamente taxi.

5 usan únicamente autobús.

16 no usan nunca taxi.

10 emplean los tres medios.

Ninguno usa otro medio distinto.

Determine el número de empleados que:

a. Exclusivamente usan transporte público (taxi o autobus)

b. No usan medios de transporte.

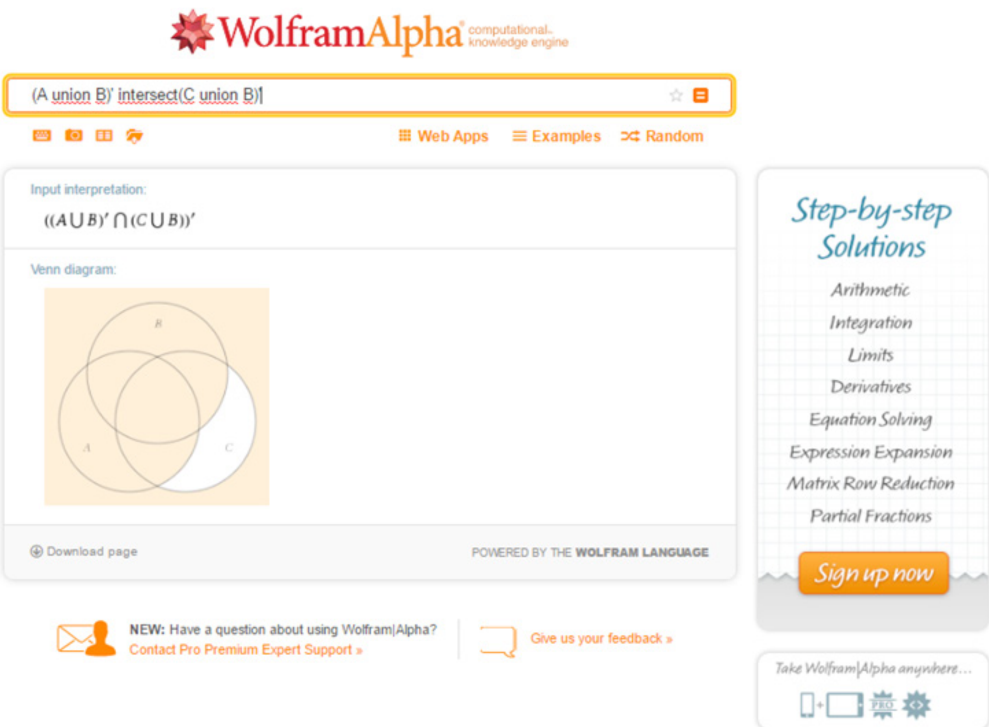
c. Usan autobus o caminan, pero no usan taxi.

1.7 Matemáticas en la web

El recurso online *WolframAlpha* descrito en la introducción ofrece una herramienta que permite visualizar a través de diagramas de Venn – Euler las distintas operaciones entre conjuntos.

En la opción *SET THEORY* se pueden realizar distintas operaciones combinadas entre conjuntos para ver cómo se representan estas operaciones a través de diagramas de Venn y se pueden definir las operaciones por el usuario. En la figura 7 se representa la operación $(A \cup B)' \cap (C \cup B)'$

Figura 7. Operaciones entre conjuntos en *WolframAlpha*



Nota: tomada de www.wolframalpha.com (2017)

Esta herramienta se puede utilizar para mostrar gráficamente ciertas propiedades de las operaciones entre conjuntos. Para mostrar por ejemplo que $A - B = A \cap B'$ se grafica primero la expresión $A - B$ y luego la expresión $A \cap B'$; al final el área sombreada debe ser la misma en ambos casos, de lo contrario no se cumple la igualdad.

Para ingresar las operaciones en la barra de introducción se escribe la operación correspondiente bien sea *Unión* o *intersect*. La operación de complemento se hace agregando un apóstrofe a la expresión y al dar *enter* se muestra la interpretación simbólica de la operación ingresada (ver figura 7).

1. Utilizando esta herramienta, representar gráficamente las siguientes operaciones:

   a. $(A \cup B) \cap (C \cup B)$

   b. $(A \cap B) \cup (C \cap B)$

   c. $(A \cap B)' \cup C$

   d. $(A \cup B) - C$

   e. $[(A \cup B) - (B \cap C)] \cup [C - (A \cup B)]$

   f. $[C - (A \cup B)] \cup [(A \cap B) - C]$

2. Utilizando los diagramas de Venn determine si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones. Para las que son falsas establezca la expresión correcta.

   a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   b. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   c. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

   d. $(A \cap B)' = A' \cap B'$

   e. $A - (B \cup C) = A \cap (B' \cap C')$

   f. $(A - B) = (A \cap B) - (A \cup C)$

   g. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (C \cap B)$

   h. $A \cap B \subseteq A$

   i. $A \cup B \subseteq A$

   j. $A \cap \phi = A$

   k. $A \cap U = A$

   l. $(A - B) - C = A - (B - C)$

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 Números Naturales
2.2 Los números enteros
2.3 Los números racionales
2.4 Los números irracionales
2.5 Suma y resta de números reales
2.6 Multiplicación y división de números reales
2.7 Propiedades de las operaciones con números reales
2.8 Potenciación de números reales
2.8.1 Radicación y exponentes fraccionarios
2.9 Logaritmación
2.10 Ejercicios de práctica II
2.11 Matemáticas y TIC

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS

En la actualidad es indiscutible el hecho de que la base que sustenta todo el constructo matemático son los números y así como para los griegos los conceptos geométricos de punto y recta son la base de sus matemáticas, hoy se acepta el hecho de que todas las proposiciones en esta área pueden ser expresadas en términos de proposiciones referentes a los números naturales, realidad que es soportada en la afirmación de Leopold Kronecker (1823–1891) cuando sostiene que "Dios creó los números naturales; el resto es obra de los hombres" (Courant y Robins, 1979, p. 45). Desde esta perspectiva, la construcción de los conjuntos numéricos se vuelve un apartado esencial para entender cómo ha evolucionado todo el edificio de la matemática y cómo se ha enriquecido a lo largo de los últimos años con valiosas y trascendentes contribuciones de importantes matemáticos y estudiosos del área.

Este capítulo, por tanto, es una aproximación a la comprensión de esos elementos básicos de la construcción de los conjuntos de números partiendo de lo más elemental hasta llegar a la definición de las operaciones dentro del conjunto de los números reales, una base importante para la comprensión de conceptos como el de relaciones y funciones que se estudian en cursos superiores de matemáticas.

2.1 Números naturales

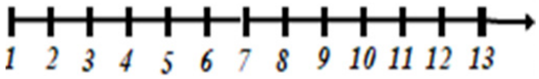
La transición de una colección de objetos concretos al concepto abstracto de número, podría pensarse como una cuestión de corte histórico–filosófico que muy poco ha ocupado a los matemáticos de esta era, ya que los números no hacen una referencia específica respecto a la característica de los objetos contados. Sin embargo, para entender el concepto mismo de número se parte de la idea de que estos están siempre ligados a objetos tangibles como partes del cuerpo u objetos cotidianos y que en las sociedades primitivas se les empieza a dar un sentido concreto, dando origen a distintas palabras y símbolos correspondientes a distintos tipos de objetos (Courant y Robins, 1979). Los números naturales surgen así por la necesidad de contar. Al principio de la civilización los seres humanos necesitaban determinar la cantidad de objetos, animales y otras pertenencias que tenían agrupadas en conjuntos, por eso, en la construcción teórica de los números naturales se establece que un número natural es el cardinal de un conjunto (Beyer, 2001).

La notación de conjunto para los números naturales y una representación por extensión del mismo es como sigue:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Estos elementos tambien pueden repressentarse mediante un objeto geométrico conocido como ***recta numérica*** la cual puede entenderse como una recta metrizada a la que a cada segmento le corresponde un único número natural (ver figura 8).

Figura 8. Recta numérica de los números naturales



Fuente de la imagen: Elaboración propia

A partir de esta representación se pueden observar varios aspectos:

- El conjunto de los naturales es un conjunto infinito a la derecha.
- Existe un primer número natural.
- Dado un número natural se puede determinar qué número lo precede y qué número le suscede.
- Dados dos elementos consecutivos del conjunto de los números naturales, no es posible encontrar un elemento intermedio entre este par de elementos.

La teoria matemática de los números naturales (y su posterior evolución con los números enteros) dio origen a lo que se conoce con el nombre de *aritmética* y partiendo de la definición y comprensión de dos operaciones básicas (**suma y multiplicación**), se establecen las leyes fundamentales que rigen estas operaciones y unos elementos esenciales para la comprensión y definición de ciertos subconjuntos de números naturales (Courant y Robins, 1979).

Múltiplos de un número

Dado un número natural *x*, el conjunto de los múltiplos de *x* es el conjunto formado por todos los números que resultan de multiplicar este número por cada uno de los números naturales. Expresado en notación simbólica esta definición se escribe así:

$$M(x) = \{x : x = nx, n \in N\}$$

Ejemplo 2.1

Presentar por extensión el conjunto de los múltiplos de 2, 3, 5 y 10.

Solución

- » $M(2)=\{2,4,6,8,10,12,...\}$
- » $M(3)=\{3,6,9,12,15,...\}$
- » $M(5)=\{5,10,15,20,25,...\}$
- » $M(10)=\{10,20,30,40,50,...\}$

Como se puede observar, el conjunto de los múltiplos de un número es un conjunto infinito.

Dos conjuntos especiales de múltiplos de un número lo constituyen los números ***pares*** y los números ***impares***. Por definición, un número es par si es multiplo de 2 y una manera formal de representarlos es como sigue:

$$Pares=\{x:x=2n,n\in N\}$$

Algunos elementos de este conjunto se presentaron en el ejemplo 2.1. Por otro lado, el conjunto de los números impares se presenta por extensión como sigue:

$$\text{Impares}=\{1,3,5,7,9,11,13,...\}$$

Como se observa a partir de la sucesión de números pares y de números impares, entre cada número par se encuentra un número impar, lo cual permite que estos últimos se definan por comprensión de la siguiente manera:

$$\text{Impares}=\{x:x=2n-1,n\in N\}$$

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m)

Una consecuencia teórica importante del concepto de múltiplos de un número es el concepto del mínimo común múltiplo, el cual se define como el menor de los múltiplos comunes a dos o más números (Hostetler, 1985).

Ejemplo 2.2

Hallar el m.c.m de los números 3, 10 y 40.

Solución

En primera medida se halla el conjunto de los multiplos de cada uno de los números dados:

- $M(3)=\{3,6,9,12,15,...\}$
- $M(10)=\{10,20,30,40,50,...\}$
- $M(40)=\{40,80,120,160,200,...\}$

A partir de estas listas se puede observar que:

$$M(3)\cap M(10)\cap M(40)=\{120,240,...\}$$

Por tanto, el menor de los múltiplos comunes a estos tres números es 120, lo cual se escribe de manera simbólica como $m.c.m.(3,10,40)=120$

El método descrito en el ejemplo 2.2 para hallar el *m.c.m.* es un poco engorroso especialmente cuando se tienen cantidades muy grandes o cuando se tiene que hacer una lista muy extensa de los múltiplos de las cantidades dadas hasta encontrar el primero que es común a todas ellas. Más adelante se describirá un método práctico que permite hacer este proceso de una manera más directa y simple.

Divisores o factores de un número

Dado un número natural *n* el conjunto de divisores de *n* es el conjunto de todos los números que lo dividen de manera exacta (Mejía et al., 2005).

Ejemplo 2.3

Presentar por extensión el conjunto de divisores de los números 10, 20 y 54.

Solución

- $D(10)=\{1,2,5,10\}$
- $D(20)=\{1,2,4,5,10,20\}$
- $D(54)=\{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

En general en el conjunto de divisores de un número se puede observar que:

- El conjunto de divisores es un conjunto finito.
- El número 1 es divisor de cualquier número.
- Todo número es divisor de sí mismo.

En la aritmética de los números enteros, a partir del concepto de divisores de un número se establecen unas reglas específicas que permiten determinar cuándo un número dado es divisible por otro. Estas reglas son conocidas como ***criterios de divisibilidad*** y en Baldor (1974) por ejemplo, se presentan estos criterios y varias de sus aplicaciones; a continuación se enuncian algunas de dichas reglas; queda como ejercicio para el lector la comprobación de las mismas en ejemplos concretos.

- **Divisibilidad por 2:** Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en cifra par.
- **Divisibilidad por 3:** Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos sea un múltiplo de 3.
- **Divisibilidad por 4:** Un número es divisible por 4 cuando los dos últimos dígitos de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 4.
- **Divisibilidad por 5:** Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en cinco.
- **Divisibilidad por 6:** Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo.
- **Divisibilidad por 7:** Un número es divisible por 7 si al separar la cifra de las unidades y restar la cantidad resultante con el doble de la cifra de las unidades se obtiene un número múltiplo de 7 o un cero.
- **Divisibilidad por 9:** Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 9.
- **Divisibilidad por 11:** Un número es divisible por 11 cuando la suma de los números que ocupan la posición par (de derecha a izquierda) menos la suma de los números que ocupan la posición impar es cero o múltiplo de 11.
- **Divisibilidad por 13:** Un número es divisible por 13 si al separar la cifra de las unidades y restar la cantidad resultante con 9 veces la cifra de las unidades el resultado es cero o múltiplo de 13.

Números primos

Los números primos son de trascendental importancia en la aritmética y múltiples aplicaciones de la matemática. Por definición se tiene que un número primo es un número natural que no tiene más divisores que él mismo y la unidad. En este orden de ideas, algunos ejemplos de números primos son 2,3,5,7,11,13,17,19,23,... Un número que no es primo es conocido como número ***compuesto*** (Miller y Hornsby, 2006).

A partir del conjunto de los números primos se pueden hacer ciertas observaciones; algunas de ellas han sido consideradas como problemas abiertos de la matemática que no han tenido solución definitiva hasta la fecha, otras han dado origen a importantes teorías o modelos de razonamiento dentro de la matemática pura (Courant y Robins, 1979, p. 85):

- El conjunto de los números primos es un conjunto infinito.
- El único número primo par es el dos, los demás primos son números impares.
- No existe una fórmula definitva mediante la cual se pueda representar al conjunto de los números primos, así como sí la hay para los números pares y los impares.

Con los números primos se tiene un resultado muy importante dentro de la aritmética conocido justamente como el ***teorema fundamental de la aritmética*** el cual establece que *todo entero N, mayor que 1, puede descomponerse en producto de factores primos de manera única, salvo conmutatividad* (Stewart, 2005). Una ilustración de esta afirmación se muestra en el ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.4

Descomponer el número 650 como producto de sus factores primos.

Solución

Para lograr esto se realizan las comprobaciones sucesivas de divisibilidad enunciadas anteriormente como se muestra a continuacion:

- En primera medida, como 650 termina en cero se puede dividir entre 2, dando como resultado 325.

$$\begin{array}{r|l} 650 & 2 \\ 325 & \\ & \\ & \end{array}$$

» Como este último resultado es divisible por 5 se aplica esta división obteniéndose como resultado 65.

$$\begin{array}{r|l} 650 & 2 \\ 325 & 5 \\ 65 & \end{array}$$

» Este último resultado también es divisible por 5 y el resultado de esta división es 13.

$$\begin{array}{r|l} 650 & 2 \\ 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & \end{array}$$

» Finalmente como este último número resulta ser primo solo puede ser dividido por él mismo.

$$\begin{array}{r|l} 650 & 2 \\ 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

» Por tanto, la cantidad dada queda representada como el producto de los divisores primos que se muestran en la columna derecha de la siguiente manera:

$$650 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

Y esta representación es única salvo que se cambie el orden de los factores, lo cual no altera el resultado de la multiplicación.

Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor o MCD entre dos o más números es el mayor de los divisores comunes de los números dados (Stewart, 2005, p. 22).

Ejemplo 2.5

Hallar el MCD de los números 60, 36 y 20

Solución

Se halla la lista de los divisores de cada uno de los números dados:

» $D(60) = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

» $D(36) = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

» $D(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$

Con base en estos conjuntos se tiene que:

$$D(60)\cap D(36)\cap D(20)=\{1,2,4,\}$$

Por tanto, el $MCD(20,36,60)=4$

Los ejemplos 2.2 y 2.5 presentan un método para el cálculo del m.c.m. y el MCD a partir de las listas de los múltiplos y divisores de los números dados. A continuación se presenta el método práctico de descomposicion en factores primos el cual puede resultar más práctico para el cálculo de estos números.

m.c.m. por descomposición en factores primos

Para aplicar este método se procede como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6

Hallar el $m.c.m.(8,12,22)$

Solución

1. Se organizan las cantidades de menor a mayor y se halla el primer factor primo para la primera cantidad. En el ejemplo el número 8 tiene factor primo dos, además los otros dos números comparten este factor.

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 22 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & \\ & & & \end{array}$$

2. Se continúa de este modo con la cantidad de la primera columna hasta reducirla a la unidad:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 22 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 11 & \end{array}$$

3. Una vez reducida a la unidad la cantidad de la primera columna se conntinúa con la cantidad de la segunda columna y así sucesivamente hasta que todas las columnas queden reducidas a 1.

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 22 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ & 1 & 11 & 11 \\ & & 1 & \end{array}$$

4. El *m.c.m.* es el resultado de multiplicar los facores primos de la columna de la derecha:

$$m.c.m(8,12,22)=(2)(2)(2)(3)(11)=264$$

MCD por descomposición en factores primos

Para aplicar este método se procede como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.7

Hallar $MCD(20,50,60)$

Solución

En este caso se hallan los factores o divisores primos comunes a todas las cantidades dadas hasta donde sea posible.

$$\begin{array}{rrr|r} 20 & 50 & 60 & 2 \\ 10 & 25 & 30 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & \end{array}$$

Hasta este punto se observa que 2 y 6 son divisibles por 2 pero no 5 y este último solo se puede dividir entre 5 pero no así con 2 y 6. Por tanto, como las tres cantidades ya no tienen divisores primos comunes se concluye que:

$$MCD(20,50,60) = (2)(5) = 10$$

Problemas de aplicación

Los temas de *m.c.m.* y MCD se pueden aplicar a la solución de algunas situaciones – problema como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.8

Después de iniciada una carrera de autos en un circuito, tres autos coinciden en el mismo punto a los 18, 24 y 32 segundos. Si se supone que los tres autos mantienen sus velocidades constantes, ¿a los cuántos segundos volverán a estar juntos?

Solución

En este caso se puede observar que los autos se encontrarán en un tiempo posterior, por tanto se debe hallar el *m.c.m.* entre los números 18, 24 y 32.

$$\begin{array}{rrr|r} 18 & 24 & 32 & 2 \\ 9 & 12 & 16 & 3 \\ 3 & 4 & 16 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & 2 \\ & 2 & 8 & 2 \\ & 1 & 4 & 2 \\ & & 2 & 2 \\ & & 1 & \end{array}$$

En este caso, los tres autos volverán a estar juntos a los 288 segundos.

Ejemplo 2.9

Una máquina procesadora de alimentos está programada para formar mezclas de tres tipos de alimentos A, B y C. Si en cierto momento dispone de 32 onzas del tipo A, 28 onzas del tipo B y 24 onzas del tipo C, ¿cuántas onzas debe tomar de cada una de los tipos de alimentos si todas las mezclan deben incluir la misma cantidad?

Solución

En este caso se debe hallar el MCD de las cantidades de onzas para cada uno de los tipos de alimentos dados.

$$\begin{array}{ccc|c} 24 & 28 & 32 & 2 \\ 12 & 14 & 16 & 2 \end{array}$$

Por tanto, el $MCD(24,28,32) = 4$ y así el número máximo de onzas que debe contener la mezcla de cada uno de los tipos de alimentos es de 4 onzas.

2.2 Los números enteros

Una de las dificultades de los números naturales es que se pueden sumar y multiplicar sin ningún problema, pero no así con la resta y la división. Es por esto que surge la necesidad de hacer una extensión al conjunto de los números naturales agregando a este el conjunto de los números negativos. Así como los números naturales surgen por la necesidad de contar, los números negativos surgieron por la necesidad de utilizar las matemáticas para resolver problemas de la cotidianidad; de este modo, los números enteros surgen de la necesidad de expresar cantidades negativas especialmente un estado de deuda (por eso inicialmente se les conoció como números deudos). Sin embargo, a lo largo de la historia se le han encontrado múltiples aplicaciones tales como ubicar posiciones de objetos con respecto a un punto de referencia, temperaturas bajo cero, etc. (Rey y Babini, 1985).

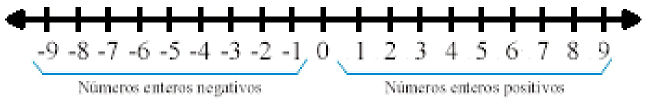
El conjunto de los números enteros se representa por extensión de la siguiente manera (ver figura 9):

Figura 9. Representación del conjunto de números enteros

$$Z = \{\ldots, -3, -2 -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

En la figura 9 se hizo una representación gráfica del conjunnto de los números naturales mediante una recta numérica. La figura 10 muestra la recta numérica correspondiente a los números enteros.

Figura 10. Recta numérica de los números enteros



Fuente de la imagen: elaboración propia.

A partir de esta figura se puede observar que:

1. El conjunto de los números enteros es un conjunto infinito tanto a derecha como a izquierda.
2. A diferencia de los naturales, en los enteros ya no se habla de un primer elemento del conjunto, aunque se suele decir que el punto que corresponde al número cero es el origen de la recta numérica.
3. La noción de predecesor o antecesor que se observa en los naturales, se sigue manteniendo en el conjunto de los enteros. Es decir, dado un número entero arbitrario se puede decir cuál está antes o después de este número.
4. Dados dos números enteros consecutivos, no existe un número entero intermedio entre estos dos.

Una noción importante dentro del conjunto de los números enteros es la noción de ***valor absoluto***. En este caso se dice que dado un número entero *a*, el valor absoluto de *a* que se escribe $|a|$, es la distancia que existe entre dicho entero y el origen de la recta numérica. En cursos posteriores de cálculo se da una definición más precisa del valor absoluto de una cantidad entendida como una función.

Ejemplo 2.10

A continuación se muestra una serie de elementos del conjunto de los números enteros y sus respectivos valores absolutos:

» $|3| = 3$

» $|-3| = 3$

» $|-10| = 10$

» $|0| = 0$

Con esta noción de valor absoluto, se puede establecer la relación de orden en el conjunto de los números enteros (misma que se mantiene en los demás conjuntos numéricos y que se verá de manera formal en el capítulo 9) así:

Dado dos números enteros *a* y *b* se puede decir que *a* es mayor que *b*, (lo cual se escribe en símbolos así: $a > b$), si $|a| > |b|$ (Stewart, 2005). Intuitivamente, esta relación de orden dice que un número entero *a* es mayor que otro entero *b* si se *a* se ubica a la derecha de *b* en la recta numérica. A partir de acá se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Todo entero positivo es mayor que todo entero negativo.
- Cero es mayor que cualquier entero negativo.
- Todo entero positivo es mayor que cero.

2.3 Los números racionales

Ya se había establecido que los números naturales surgen por la necesidad de contar. Sin embargo, dentro de las necesidades científicas y operacionales de las primeras civilizaciones, también surge la necesidad de medir cantidades como por ejemplo longitudes, áreas, peso, tiempo, etc. Con el conjunto de los números enteros estas operaciones encuentran ciertos obstáculos puesto que las medidas de estas cantidades son susceptibles de divisiones arbitrariamente pequeñas. De este modo surge la necesidad de extender el estudio de la aritmética más allá de los números enteros. Una de las primeras dificultades que se hicieron evidentes en el ejercicio de medir fue la determinación de cuántas veces se contenía una unidad de medida, por ejemplo el metro, en el objeto que se quería medir. Esta cantidad podría ser un número entero, por ejemplo 60 m, sin embargo, esta medida no necesariamente tendría que ser expresada en múltiplos enteros de la unidad dada ya que puede darse el hecho de que esta medida esté contenida entre dos enteros consecutivos de dicha unidad, por ejemplo entre 60 m y 61 m. Esto pudo haber dado origen al establecimiento de subunidades de medida con nombres especiales como el centímetro, el pie, la pulgada, para una unidad como el metro o los minutos, horas y segundos para una unidad como la hora. Sin embargo, en los términos formales de la matemática, si una unidad se divide en en *n* partes iguales, esto se expresa con el símbolo $1/n$ y en un objeto en el que se tiene *m* partes de estas subunidades su medida se representará mediante la expresión m/n, la cual se llegaría a conocer como ***fracción*** o ***razón***. El entendimiento de esta expresión como número tardó varios siglos en llegar a darse, pero finalmente llegó a ser considerado como tal y empezó a denominarse simplemente como ***número racional*** (Courant y Robins, 1979).

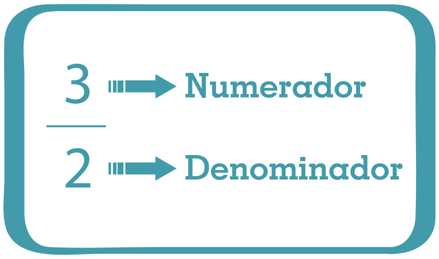
Más allá de las razones prácticas para la introducción de los números racionales, existe una razón implícita de carácter aritmético que motiva la extensión del conjunto de los números enteros. Así como en el caso de los naturales, la necesidad de tener un conjunto numérico en donde se encontraran las soluciones a la operación $a-b$ cuando $a<b$, en el caso de los racionales, estos surgen como una forma de expresar la división no exacta de números enteros. El término "racional" proviene del término "razón" que significa división (Courant y Robins, 1979).

Algunos racionales son: $\frac{3}{2},-\frac{3}{7},\frac{2}{5}, etc.$

Aceptando el hecho de que una fracción es una expresion de la forma m/n con *m* y *n* números enteros, se puede incluso observar que expresiones como $-3/1, 20/1, 0/1, etc$ tienen sentido en este conjunto y por tanto se llega al hecho de que todo número entero puede ser considerado también como un número racional.

En una fracción se identifican los elementos ***numerador y denominador*** como se ilustran en la figura 11:

Figura 11. Numerador y denominador



Fuente de la imagen: elaboración propia.

Un proceso común en las fracciones es el proceso de ***simplificación*** o ***reducción*** el cual consiste en dividir tanto el numerador y el denominador por una misma cantidad. Cuando este proceso no se puede continuar se dice que la fracción es ***irreducible o irreductible*** (Stewart, 2005, p. 69).

Ejemplo 2.11

Simplificar las fracciones $\frac{14}{21};-\frac{36}{10};\frac{48}{16}$

Solución

» En el caso de la fracción $\frac{14}{21}$ se observa que tanto el numerador como el denominador tienen como divisor común el 7, por tanto, después de aplicada la división se tiene que $\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$. En esta última expresión ya no se puede continuar con la simplificación puesto que 2 y 3 no tienen divisores comunes.

» En la fracción $-\frac{36}{10}$, se observa que 36 y 10 tienen como divisor común al 2, luego al dividir tanto el numerador como el denominador por este divisor común se obtiene que la forma irreductible de la fracción $-\frac{36}{10}$ es la fracción $-\frac{18}{5}$.

» Para el caso de la fracción $\frac{48}{16}$ las simplificaciones sucesivas que se pueden aplicar se ven en la siguiente sucesión de igualdades:

$$\frac{48}{16}=\frac{24}{8}=\frac{12}{4}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$$

El resultado de esta simplificación también se puede obtener directamente de la división de 48 entre 16, ya que como se dijo anteriormente, una fracción representa una división del numerador entre el denominador.

La representación en forma de conjunto de los números racionales es como sigue:

$$Q=\left\{\frac{a}{b}:a,b\in Z,b\neq 0\right\}$$

Es decir que el conjunto de los números racionales está formado por todas aquellas fracciones cuyo numerador y denominador es un número entero, con la condición adicional de que no puede haber división por cero (Stewart, 2005).

Representación decimal de un número racional

Puesto que la fracción representa una división entre el numerador y el denominador de dicha expresión, otra forma usual de representar números racionales es por medio de números decimales como en los siguientes ejemplos (la línea encima de la cifra decimal indica que esta cifra se repite indefinidamente) (ver figura 12).

Figura 12. Representación decimal de racionales

a) $\frac{6}{1}=6=6.0$

b) $\frac{1}{2}=0.5$

c) $\frac{5}{3}=1.66666....=1.\overline{6}$

d) $\frac{25}{7}=3.571428571428.....=3.\overline{571428}$

e) $\frac{47}{45}=1.0444....=1.0\overline{4}$

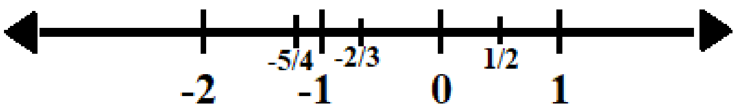
Fuente imagen: elaboración propia.

A partir de esta representación decimal de un racional se puede observar que un número racional es:

1. Un número decimal finito ($\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; etc$)
2. Un número decimal infinito pero periódico ($\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; etc$)

La figura 13 corresponde a la representación gráfica de los números racionales donde se muestran algunos ejemplos en una recta numérica.

Figura 13. Recta numérica de los racionales



Fuente imagen: elaboración propia.

A partir de esta representación se pueden hacer algunas observaciones:

1. El conjunto de los números racionales es un conjunto infinito.
2. Entre cada par de enteros existen infinitos números racionales puesto que aquellos números con representación decimal infinita periódica ocupan un lugar en dicha recta. De hecho se puede ver que entre cada par de racionales, no importa lo cercano que sean uno del otro, existen infinitos números racionales y esto se conoce como el nombre de *propiedad de densidad del conjunto Q* (Acevedo, Ospina y Salazar, 2009).
3. No existe la noción de antecesor o sucesor de un número racional.

Con base en las observaciones anteriores cabe formular la siguiente pregunta: ¿llenan completamente la recta numérica los números racionales?

2.4 Los números irracionales

Los griegos, particularmente la escuela pitagórica, en el estudio de la longitud de segmentos y sus comparaciones con longitudes enteras y no enteras, se encontraron con el hecho de que todos los segmentos no son comparables con la unidad. Este descubrimiento desvirtuó la sospecha de que los números racionales "llenaban" por completo la recta numérica y dio paso a uno de los descubrimientos más revolucionarios de la matemática antigua, los números irracionales (Courant y Robins, 1979).

En el apartado anterior se estableció que todo número racional, o bien tiene una representación decimal finita o una representación decimal infinita pero periódica. En este sentido, quedan faltando aquellas cantidades decimales con representación infinita no periódica. Este problema fue tratado por los antiguos griegos particularmente por la escuela pitagórica quienes ante la imposibilidad de representar por ejemplo la cantidad $\sqrt{2}$ como una división de dos enteros, se encontraron con las cantidades cuya representación decimal no es periódica (Beyer, 2001).

Los números irracionales se representan mediante el siguiente conjunto:

$$Q^c = \{x : x \text{ no tiene representación decimal infinita periódica}\}$$

La notación Q^c para los irracionales surge del hecho de que este conjunto es un complemento para el conjunto de los números racionales.

Algunos ejemplos típicos de este conjunto son los que se muestran en la figura 14, aunque al igual que los racionales, los números irracionales constituyen un conjunto infinito.

Figura 14. Representación decimal de irracionales

$$\sqrt{2} = 1.414213562373....$$
$$\sqrt{3} = 1.442249570307....$$
$$e = 2.71828182845904....$$
$$\pi = 3.14152653489793....$$

Fuente de la imagen: Elaboración propia.

De igual modo que sucede con los números racionales, los números irracionales saturan la recta numérica en el sentido de que entre cada par de números irracionales existen infinitos números irracionales. También se tiene el hecho verificable de que entre cada par de números racionales hay infinitos números irracionales y entre cada par de irracionales hay infinitos números racionales. En tal sentido, los espacios que quedaban en la recta numérica de los racionales son completados por los números irracionales y juntos, Q^c y Q saturan la recta numérica (Acevedo et al., 2009).

Las ideas hasta acá expuestas sobre conjuntos numéricos permiten establecer las siguientes afirmaciones:

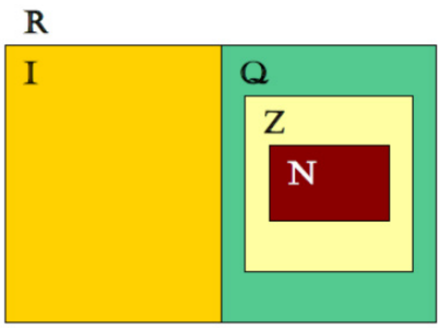
1. $Q^* \cap Q = \phi$. Es decir que no existe un número que pueda ser racional e irracional al mismo tiempo.
2. Todo número natural es a su vez un número entero. De hecho, cuando se refiere a los números naturales la literatura matemática suele decir *enteros positivos.*

3. Todos los números enteros son a su vez números racionales.

4. Un número cualquiera puede ser o un irracional o un número racional.

A partir de estas construcciones es que surge en la historia de la matemática el conjunto de los números ***Reales,*** el cual puede ser entendido como el conjunto de todos los números o en términos más precisos, como el conjunto formado por la unión de los racionales y de los irracionales ($R = Q \cup Q^c$); estas relaciones de contenencia se muestran en la figura 15. Queda faltando la introducción de los números complejos que se estudian en otros contextos del cálculo.

Figura 15. Subconjuntos de números reales



Fuente de la imagen: Elaboración propia.

2.5 Suma y resta de números reales

En el conjunto de los números reales se definen las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. Estas mismas tienen ciertas variaciones dependiendo del tipo de número involucrado en dicha operación (natural, entero, racional o irracional). Los siguientes ejemplos ilustran estas operaciones en cada uno de dichos subconjuntos numéricos.

Para sumar números reales se consideran los siguientes casos:

Caso 1: Que las cantidades tengan el mismo signo. En este caso se suman los valores absolutos de las cantidades dadas y el resultado lleva el signo que tiene cada una de ellas.

Ejemplo 2.12

Hallar el resultado de las siguientes sumas:

a. $(+3)+(+5)+(+8)$

b. $(-7)+(-12)+(-8)$

Solución

a. En este caso, las cantidades dadas son todos enteros positivos, por tanto la suma se hace de manera natural:

$$(+3)+(+5)+(+8)=3+5+8=16$$

Allí se observa que como todas las cantidades son positivas, el resultado de la suma también es positivo.

b. Para este ejercicio, en vista de que todos los enteros dados son negativos, sumamos sus valores absolutos 7, 12 y 18, respectivamente.

$$7+12+18=37$$

Luego, puesto que todas las cantidades llevan el signo menos, el resultado debe quedar también con el signo negativo. Así:

$$(-7)+(-12)+(-8)=-37$$

Si en lugar de sumar números enteros, se quiere hallar la suma de números decimales, el principio que se aplica en el caso de que todos lleven igual signo es el mismo que se aplicó en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.13

Hallar el resultado de las siguientes sumas:

a. $7.66+1.482+6.36+4$

b. $-82.25+\left(-3.0256\right)+\left(-0.1\right)+\left(-7\right)$

Solución

a. Para hallar el resultado, se organizan las cantidades de modo que el punto decimal quede en columna. Para igualar las cifras decimales de todos los sumandos se pueden agregar los ceros que sean necesarios. Luego se suman las cantidades de modo natural. Como todos son positivos, el resultado también es positivo:

$$\begin{array}{r} 7{,}660 \\ 1{,}482 \\ 6{,}340 \\ 4{,}000 \\ \hline 19{,}482 \end{array}$$

b. De igual manera que en el ejemplo anterior, se organizan las cantidades de modo que la coma decimal quede en columna y como todos son del mismo signo se suman y el resultado llevará el signo menos que tienen todos los números dados:

$$\begin{array}{r} -82{,}2500 \\ -3{,}0256 \\ -0{,}1000 \\ -7{,}0000 \\ \hline -92{,}3756 \end{array}$$

Caso 2: Que las cantidades tengan distinto signo: En este caso se restan la cantidad de mayor valor absoluto con la cantidad de menor valor absoluto y el resultado lleva el signo de la cantidad con mayor valor absoluto.

Ejemplo 2.14

Hallar el resultado de las siguientes expresiones:

a. $(-3)+(+12)$

b. $(+20)+(-43)$

c. $-7{,}36+12{,}28$

d. $11{,}254+(-25{,}12)$

Solución

a. En esta expresión se tiene que $|-3|=3$ y $|12|=12$, por tanto, $12-3=9$ y así: $(-3)+(+12)=9$

b. En este caso se nota que $|20|=20$ y $|-43|=43$, luego, $43-20=23$ con lo que $(+20)+(-43)=-23$

c. De igual manera que en los casos anteriores, $|-7{,}36|=7{,}36$ y $|12{,}28|=12{,}28$. De aquí se tiene entonces que $12{,}28-7{,}36=4.92$, por tanto, $-7{,}36+12{,}28=4{,}92$

d. Finalmente, se tiene que $|11{,}254|=11{,}254$ y $|-25{,}12|=25{,}12$ y puesto que, $25{,}12-11{,}524=13{,}866$ se tiene que $11{,}254+(-25{,}12)=-13{,}866$

Caso 3: En este caso se consideran aquellas expresiones que tienen al mismo tiempo cantidades positivas como cantidades negativas. En tal caso, una forma de hallar el resultado es agrupando las cantidades de igual signo y aplicar luego los dos casos anteriores.

Ejemplo 2.15

Hallar el resultado de

a. $(-5)+8+(-10)+12+(-8)$

b. $120+(-25)+(-40)+(-1)$

c. $8,236+(-2,46)+76,0025+(-3,9951)$

Solución

a. Aplicando sucesivamente los dos casos anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}(-5)+8+(-10)+12+(-8) &= 8+12+(-5)+(-10)\\ &= 20+(-15)\\ &= 5\end{aligned}$$

b. Para este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}120+(-25)+(-40)+(-1) &= 120+(-25)+(-40)+(-1)\\ &= 120+(-66)\\ &= 54\end{aligned}$$

c. Se aplica el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores, con lo que resulta que:

$$\begin{aligned}&8,236+(-20,46)+6,0025+(-3,9951)\\ &= 8,236+6,0025+(-20,46)+(-3,9951)\\ &= 14,2385+(-24.4551)\\ &= -10,2166\end{aligned}$$

Cuando lo que se quiere es sumar o restar números fraccionarios se consideran diferentes situaciones:

Caso 1 Fracciones de igual denominador (Homogéneas): En este caso se deja el mismo denominador y se suman o restan los numeradores.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b}$$

Ejemplo 2.16

A continuación se muestra la suma y resta de algunas fracciones de igual denominador:

a. $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}=\frac{4+9}{7}=\frac{13}{7}$

b. $-\frac{3}{5}+\frac{11}{5}=\frac{-3+11}{5}=\frac{8}{5}$

c. $-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{-5-2}{3}=-\frac{7}{3}$

Caso 2 Distinto denominador: En este caso se aplica el siguiente proceso:

1. Se halla el común denominador por el método del mínimo común múltiplo.
2. Se divide el m.c.m. por el denominador de cada una de las fracciones dadas.
3. Se multiplica el resultado anterior por el respectivo numerador.
4. Se resuelven las sumas y restas indicadas.
5. Se simplifica si es el caso.

Ejemplo 2.17

Hallar el resultado de las siguientes sumas:

a. $-\frac{14}{7}+\frac{5}{9}$

b. $-\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$

c. $\frac{12}{5}-\frac{7}{36}+\frac{2}{9}-\frac{1}{20}$

Solución

a. En este caso se observa que $m.c.m.(7,9)=63$, por tanto, según el procedimiento descrito anteriormente se tiene que:

$$-\frac{14}{7}+\frac{5}{9}=\frac{-(63\div 7)\cdot 14+(63\div 9)\cdot 5}{7\cdot 9}=\frac{-126+35}{63}=\frac{-91}{63}=-\frac{91}{63}$$

b. Para este caso se tiene que el $m.c.m.(6,8)=24$ con lo que:

$$-\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=\frac{-(24\div 6)\cdot(1)+(24\div 8)\cdot 5}{24}=\frac{-4+15}{24}=\frac{11}{24}$$

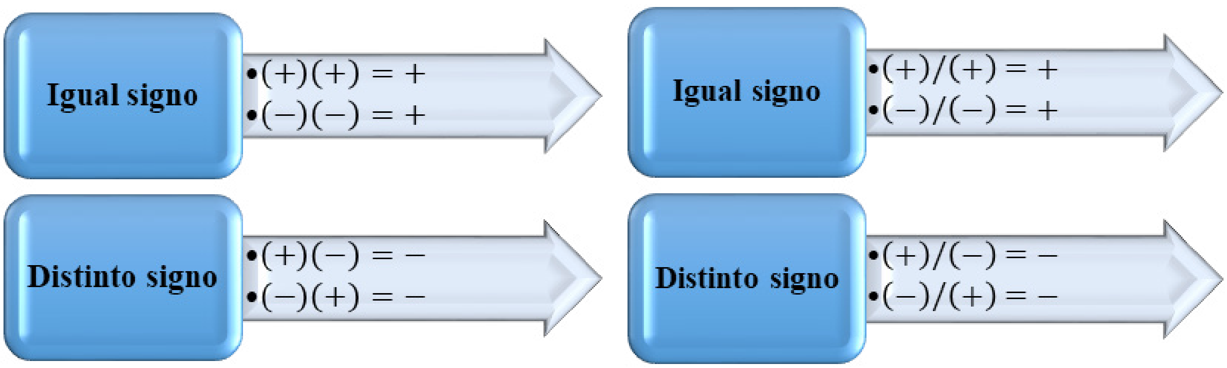
c. Finalmente, tenemos que $m.c.m.(5,9,20,36)=180$ de donde se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{12}{5}-\frac{7}{36}+\frac{2}{9}-\frac{1}{20} &= \frac{36\cdot 12-5\cdot 1+20\cdot 2-9\cdot 1}{180}\\ &= \frac{432-5+40-9}{180}\\ &= \frac{458}{180}\\ &= \frac{229}{90}\end{aligned}$$

2.6 Multiplicación y división de números reales

La multiplicación y división de números reales se realiza de modo habitual, sólo hay que considerar al final de cada producto la ley de signos tanto para la división como para la multiplicación, las cuales se resumen en la figura 16:

Figura 16. Ley de signos para la multiplicación y la división en los reales



Fuente de la imagen: Elaboración propia.

Ejemplo 2.18

Hallar el resultado de cada una de las operaciones:

a. $(-5)\ (-3)\ (10)\ (-30)$ b. $\dfrac{-6312}{12}$

Solución

Aplicando la ley de los signos, resulta que:

a. $(-5)\ (-3)\ (10)\ (-30)=-4500$ b. $\dfrac{-6312}{12}=-526$

Para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Luego se simplifica el resultado.

Ejemplo 2.19

A continuación se ilustra el proceso de multiplicación de números racionales:

a. $-\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{8}=\frac{(-3)(9)}{5\cdot 8}=-\frac{27}{40}$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{9}{8}=\frac{(4)(9)}{5\cdot 8}=\frac{36}{40}=\frac{9}{10}$

Para dividir números fraccionarios se aplica lo siguiente:

1. Se multiplica el numerador de la primera fracción (dividendo) por el denominador de la segunda fracción (divisor). Este será el numerador del cociente de la división.
2. Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción para obtener el denominador del cociente de la división.

Ejemplo 2.20

a. $\frac{2}{5}\div\frac{7}{3}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$

b. $\frac{7}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{28}{15}$

2.7 Propiedades de las operaciones con números reales

Las operaciones básicas que se han definido en el conjunto de los números reales cumplen ciertas propiedades que son comúnmente conocidas como *axiomas de cuerpo de los números reales* (Leithold, 2003, p. 45). Los axiomas de cuerpo se establecen básicamente para la suma y multiplicación de números reales, entendiendo que la resta y la división se pueden ver como casos particulares de estos; las propiedades invertivas para la suma y para la mulplicación son las que definen la resta y la división. La propiedad distributiva relaciona las dos operaciones de suma y multiplicación y es la que permite expresar una cantidad como producto de sus factores o divisores.

Para cada una de ellas se consideran $a,b,c\in R$. En tal caso se tiene que para la suma y el producto de cantidades reales se cumple que (ver tabla 1):

Tabla 1

Propiedades de la suma y producto de números reales

Nombre de la propiedad	Forma simbólica	Ejemplos
Clausurativa	$a+b\in R$ $a\cdot b\in R$	$-5-6=-11$ $\frac{7}{3}-\frac{1}{9}=\frac{20}{9}$
Conmutativa	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$	$-5+3=3-5$ $(-6)\cdot(-9)=(-9)\cdot(-6)$
Modulativa (existencia del elemento neutro)	$a+0=a$ $a\cdot 1=a$	$\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$ $\frac{\pi}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}$
Invertiva para la suma	$a+(-a)=0$	$\frac{5}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$
Invertiva para el producto	$a\cdot a^{-1}=a\cdot\frac{1}{a}=1$ con $a\neq 0$	$7\cdot 7^{-1}=7\cdot\frac{1}{7}=\frac{7}{7}=1$ $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)$ $=\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)$ $=\frac{12}{12}$ $=1$
Propiedad Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	$(5+2)+6=5+(2+6)$ $\left(\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot 3=\frac{8}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot 3\right)$
Propiedad Distributiva	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	$5\cdot(3-8)=5\cdot 3-5\cdot 8$

Comentarios acerca de estas propiedades

Al observar las propiedades descritas en la tabla 1 surgen las siguientes afirmaciones:

1. En la propiedad modulativa el elemento 0 se conoce como el módulo para la suma y el elemento 1 se conoce como el módulo para la multiplicación.

2. En la propiedad invertiva para la suma, la cantidad $(-a)$ se conoce como inverso aditivo y se entiende como la misma cantidad dada pero con signo contrario.
3. En la propiedad invertiva para el producto, la cantidad $a^{-1} = \frac{1}{a}$ se conoce como inverso multiplicativo.
4. Tanto el inverso aditivo como el inverso multiplicativo son usados para definir las operaciones de resta y división, respectivamente. Por eso en la literatura matemática no se suelen dar de manera explícita las propiedades para estas operaciones ya que son consideradas como casos particulares de las primeras.
5. La propiedad distributiva es la propiedad que relaciona las dos operaciones de suma y multiplicación y es fundamental para definir el proceso de factor común que se estudiará más adelante.

A partir de las propiedades básicas de números reales se pueden deducir otras que son de gran importancia en la simplificación de expresiones (Beceriil y Reyes, 2012):

» $(a)(b) = (+a)(+b) = ab$
» $(-a)(b) = (-a)(+b) = -ab$
» $(a)(-b) = (+a)(-b) = -ab$
» $(-a)(-b) = ab$
» $\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$
» $\frac{-a}{b} = \frac{-a}{+b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
» $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
» Para todo $a \in R$, $a \cdot 0 = 0$
» Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $\frac{0}{a} = 0$
» Si $a \cdot b = 0$, $a = 0$ o $b = 0$
» Si $\frac{a}{b} = 0$ entonces $a = 0$

2.8 Potenciación de números reales

Cuando se realizan operaciones con números naturales, por ejemplo una suma, en donde el número que se suma es el mismo varias veces, ej.

$$\underbrace{2+2+2+2+2+2}_{6 \text{ veces el } 2}$$

para no escribir de manera extensa, simplemente se escribe:

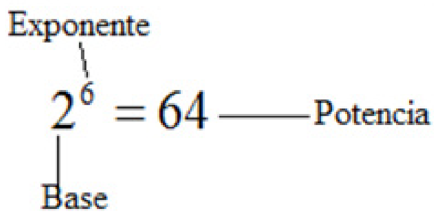
$$\underbrace{2+2+2+2+2+2}_{6 \text{ veces el } 2} = 2 \times 6$$

Si ahora en lugar de sumar se quiere multiplicar, se tiene:

$$\underbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2}_{6\ \text{veces el } 2}=2^{6}$$

Esta operación se conoce como potenciación; en ella se reconocen los elementos que se muestran en la figura 17

Figura 17. Términos de una potencia



Nota: Elaboración propia.

Se observa que la ***base*** corresponde a la cantidad que se multiplica varias veces por sí misma; el ***exponente*** es el número de veces en que se multiplica la base por sí misma y la ***potencia*** corresponde al resultado de esta multiplicación (Beceril y Reyes, 2012).

Con base en las leyes de la multiplicación de números reales, se puede observar que si la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva, ya que se está multiplicando una cantidad negativa un número par de veces, en caso contrario es negativa. Otra observación que se puede hacer respecto a la potenciación es que tanto la base como el exponente no tienen que ser cantidades enteras ya que la potenciación también está definida para bases y exponentes racionales; estos casos particulares de esta operación se definen mas adelante (Miller y Hornsby, 2006)

Según Swokowski (2005), para la operación de potenciación de números reales se cumplen las siguientes leyes (ver tabla 2):

Tabla 2

Leyes de los exponentes para la potenciación de números reales.

Propiedad	Ejemplos
$a^0=1$	$5^0=1;(-3)^0=1;\left(-\frac{7}{5}\right)^0=1$
$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n,\ a\neq 0$	$3^{-4}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^3=\left(\frac{3}{5}\right)^3$ $(-12)^{-2}=\left(-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{144}$
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	$3^{-4}\cdot 3^5=3^{-4+5}=3^2=9\quad 2^3\cdot 2^2=2^{3+2}=2^5$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\left(3^{-2}\right)^3=3^{-2\cdot 3}=3^{-6}=\left(\frac{1}{3}\right)^6$ $\left[\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]^4=\left(\frac{7}{8}\right)^{2\cdot 4}=\left(\frac{7}{8}\right)^8$
$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	$(3\cdot(-2))^2=3^2\cdot(-2)^2=9\cdot 4=36$ $(4\cdot 7)^4=4^4\cdot 7^4$ $\left(\frac{7}{8}\cdot 3\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2\cdot 9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{(-2)^3}{5^3}=-\frac{8}{125}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\frac{5^4}{5^2}=5^{4-2}=5^2=25$ $\frac{7^3}{7^5}=7^{3-5}=7^{-2}=\frac{1}{49}$

Estas propiedades son de gran utilidad en la simplificación de expresiones, tal como se muestra en el ejemplo 2.21.

Ejemplo 2.21

Reducir o simplificar la siguiente expresion $\dfrac{20^4 \cdot 15^2 \cdot 6^3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$

Solucion

A continuación se muestra cada uno de los pasos dados y la propiedad aplicada en cada caso.

$$\frac{20^4 \cdot 15^2 \cdot 6^3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{\left(2^2 \cdot 5\right)^4 \cdot \left(3 \cdot 5\right)^2 \cdot \left(2 \cdot 3\right)^3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$ *Descomposición en factores primos.*

$$= \frac{2^8 \cdot 5^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ y $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

$$= \frac{2^{11} \cdot 5^6 \cdot 3^5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$= 2^{10} \cdot 5^5 \cdot 3^4$$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.8.1 Radicación y exponentes fraccionarios

En las propiedades anteriores los exponentes *m* y *n* fueron tomados dentro del conjunto de los números enteros, sin embargo, cada una de estas propiedades se pueden generalizar tomando *m* y *n* como números reales arbitrarios. En el caso particular en que estos exponentes son fraccionarios, la potenciación vista así se conoce como radicación. (Swokowski, 2005, p. 121). En símbolos esta operación se expresa así:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

- La cantidad a se conoce como ***cantidad subradical.***
- La cantidad n se conoce como ***índice de la raíz.*** Si este no aparece indicado en la expresión anterior se asume que el índice es dos.
- La cantidad b se conoce como raíz o resultado.

La expresión anterior se lee "*raíz n-ésima de a igual a b*" Si $n = 2$ la expresión se lee "*raíz cuadrada de…*"; si $n = 3$ se lee "*raíz cúbica de …*". Para $n \geq 4$ se denomina de acuerdo con el carácter ordinal del índice de la raíz: cuarta, quinta, etc.

En la radicación se busca una cantidad que elevada al índice de la raíz dé como resultado el valor de la cantidad subradical. Es por esto que la radicación es considerada como una operación inversa de la potenciación.

Ejemplo 2.22

Hallar el valor de las siguientes raíces:

a. $\sqrt{25}$ b. $\sqrt[3]{216}$ c. $\sqrt[3]{64}$

Solución

a. $\sqrt{125}=5$ porque $5^2=25$.

b. $\sqrt[3]{216}=6$ porque $6^3=216$.

c. $\sqrt[3]{64}=4$ porque $4^3=64$.

A partir de la definición de la radicación se puede observar que ***NO*** existe una raíz par de una cantidad negativa puesto que no existe un número real que elevado a un exponente par, dé como resultado una cantidad positiva. Una propiedad muy importante que cumplen las raíces es la siguiente:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}, \forall a\in R. m,n\in Z.$$

La importancia de esta propiedad radica en dos hechos fundamentales: en primer lugar, esta propiedad permite hallar el valor de cualquier raíz y permite tambén simplificar cualquier expresión radical. En segundo lugar, muestra que la radicación puede ser vista como una potenciación y así, todas las propiedades que se cumplen para la radicación se pueden deducir fácilmente de las propiedades que cumple la potenciación (Beceril y Reyes, 2012).

Ejemplo 2.23

Hallar el valor de las siguientes raíces:

a. $\sqrt{125}$ b. $\sqrt[3]{216}$ c. $\sqrt[3]{64}$

Solución

En primera medida, se descomponen las cantidades en sus factores primos, luego se aplica la definición de raíz como una potencia de exponente fraccionario:

a. $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5^{2/2}=5^1=5$

b. $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6^{3/3}=6^1=6$

c. $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^{6/3}=2^2=4$

Algunas propiedades de la radicación que son importantes para la simplificación de expresiones radicales, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3

Propiedades de los radicales

Propiedad	Ejemplos
$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{125\cdot 27}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{27}=5\cdot 3=15$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};b\neq 0$	$\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[6]{36}}=\sqrt[18]{36}$
$\sqrt[m]{a^m}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$	$\sqrt{16^{10}}=\left(\sqrt{16}\right)^{10}=4^{10}=2^{20}$

El ejemplo 2.24 muestra la aplicación de estas propiedades en la simplificación de expresiones radicales:

Ejemplo 2.24

Simplificar las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{9216}$ b. $\sqrt[3]{5184}$ c. $\dfrac{2\sqrt[3]{216x^4y^7}}{\sqrt{4x^2y^2}}$

Solución

a. $\sqrt{9216}=\sqrt{2^{10}\cdot 3^2}=\sqrt{2^{10}}\cdot\sqrt{3^2}=2^{10/2}\cdot 3^{2/2}=2^5\cdot 3=32\cdot 3=96$

b. $\sqrt[3]{5184}=\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}=\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^4}=2^2\cdot\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=4\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}=12\sqrt[3]{3}$

Esta última raíz se deja indicada puesto que no se puede simplificar.

c. $\dfrac{2\sqrt[3]{216x^4y^7}}{\sqrt{4x^2y^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{\cancel{2^3}\cdot\cancel{3^3}\cdot\cancel{x^3}\cdot x\cdot\cancel{y^6}\cdot y}}{2\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}}=\dfrac{\cancel{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y^2}\cdot\sqrt[3]{xy}}{\cancel{2}\,\cancel{x}\cancel{y}}$

$=2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{xy}=6\sqrt[3]{xy}$

Para hallar el valor de una potencia cuando su exponente es fraccionario, basta con interpretar dicho exponente como una raíz y aplicar las propiedades de la radicación.

Ejemplo 2.25

Hallar el valor de las siguientes potencias:

a. $9^{1/2}$

b. $32^{1/5}$

c. $(-216)^{1/3} = -6$

d. $9^{3/2}$

e. $4^{-1/2}$

f. $16^{-3/4}$

Solución

a. $9^{1/2} = \sqrt{9^1} = 3$

b. $32^{1/5} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

c. $(-216)^{1/3} = \sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{(-1)\cdot 2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = (-1)\cdot 2\cdot 3 = -6$

d. $9^{3/2} = \left(9^{1/2}\right)^3 = 3^3 = 27$

e. $4^{-1/2} = \left(4^{1/2}\right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

f. $16^{-3/4} = \left(16^{1/4}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

A continuación se presenta otra serie de ejemplos aplicando las distintas propiedades de potenciación:

Ejemplo 2.26

a. $5^3 \cdot 5^{7/2} = 5^{3+7/2} = 5^{13/2}$

b. $4^{-2} \cdot 4^{7/3} = 4^{-2+7/3} = 4^{1/3}$

c. $\dfrac{4^{7/2}}{4^{3/2}} = 4^{7/2-3/2} = 4^2 = 16$

d. $\dfrac{x^{9/4}}{x^4} = x^{9/4-4} = x^{-7/4}$

e. $\dfrac{9^{1/2}}{9^{-2}} = 9^{1/2-(-2)} = 9^{5/2} = \left(9^{1/2}\right)^5 = 3^5 = 243$

f. $\left(5^3\right)^{7/6} = 5^{3\cdot(7/6)} = 5^{7/2}$

g. $(36)^{1/2} = (4\cdot 9)^{1/2} = 4^{1/2}\cdot 9^{1/2} = 2\cdot 3 = 6$

h. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

i. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3} = \dfrac{8^{-2/3}}{27^{-2/3}} = \dfrac{\left(8^{1/3}\right)^{-2}}{\left(27^{1/3}\right)^{-2}}$

$= \dfrac{2^{-2}}{3^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{4}$

2.9 Logaritmación

Así como la radicación se puede ver como una operación inversa de la potenciación, la logaritmación también es una operación inversa de la potenciación. Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés Jhon Napier en 1614 y se constituyeron como una herramienta útil para realizar operaciones aritméticas de manera abreviada (Courant y Robins, 1979).

Por definición, la logaritmación es una operación que permite hallar el exponente de una potencia conocidos la base y el resultado de la potencia. Por ejemplo, ¿a qué potencia se debe elevar la base 4 para obtener el resultado 64? En este caso, como $4^3 = 64$, se tiene entonces que el logaritmo en base 4 de 64 es igual a 3, lo cual se escribe así:

$$\log_4 64 = 3$$

En general se tiene que el logaritmo en base b de una cantidad N es igual a c si $b^c = N$; en símbolos esto se expresa así:

$$\log_b N = c$$

La cantidad *b* se conoce como ***base del logaritmo;*** la cantidad *N* es el ***argumento del logaritmo*** y la cantidad *c* es el ***valor o resultado del logaritmo*** (Arya y Lardner, 2009).

Otros casos de logaritmos se muestran en el ejemplo 2.27.

Ejemplo 2.27

a. $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

b. $\log_{10} 0,0001 = -4$ porque $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0,0001$

c. $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$ porque $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Observaciones generales sobre los logaritmos

Las siguientes observaciones son fácilmente verificables a partir de la definición misma de logaritmo y permiten entender ciertas propiedades de esta operación:

- El $\log_b N$ solo está definido para $N > 0$; no existe el logaritmo de una cantidad negativa independientemente del valor de la base.

- El $\log_b 0$ no está definido dentro de los números reales.
- Cuando la base del logaritmo es 10 se suele omitir el valor de la base en la notación del logaritmo, es decir, $\log_{10} N = \log N$.
- Existe un logaritmo de uso muy particular en matemáticas conocido como ***logaritmo natural.*** En este logaritmo la base es el número ***e*** conocido como número de Euler, el cual es un número irracional $(e = 2{,}7182818284590452\ldots)$. En símbolos se tiene que:

$$\log_e N = \ln N$$

Propiedades de los logaritmos

Las siguientes propiedades se pueden deducir fácilmente de la definición de logaritmo y de las propiedades de la potenciación de números reales. En cada caso, se consideran $a, b, x, y \in R. x, y > 0$ (Beceriil y Reyes, 2012). Ver ejemplos en la tabla 4.

Tabla 4

Propiedades de los logaritmos

Propiedad	Ejemplos
$\log_b 1 = 0$	$\log_5 425 = 0$
$\log_b b = 1$	$\log_5 5 = 1$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$; $\log 10 = 1$
$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = 2 + 4 = 16$
$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ con $y \neq 0$	$\log_2 \left(\frac{4}{16}\right) = \log_2 4 - \log_2 16 = 2 - 4 = -2$
$\log_b (x^y) = y \log_b x$	$\log_2 (4^2) = 2 \log_2 4$; $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{1/3} = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$

Las anteriores propiedades son utilizadas para simplificar expresiones que involucran logaritmos, tal como se muestra en el ejemplo 2.28.

Ejemplo 2.28

Simplificar la expresión

$$\sqrt[10]{\left\{\log_9\left[(\log_5 25)\cdot(\log_6 36)\cdot(\log_7 49)\cdot(\log_2 64)\cdot\left(\log_9\left(9^{27/16}\right)\right)\right]\right\}^{\log_2 1024}}$$

Solución

Aplicando las propiedades y la definición de logaritmo se tiene que:

$$\sqrt[10]{\left\{\log_9\left[(\log_5 25)\cdot(\log_6 36)\cdot(\log_7 49)\cdot(\log_2 64)\cdot\left(\log_9\left(9^{27/16}\right)\right)\right]\right\}^{\log_2 1024}}$$

$$=\sqrt[10]{\left\{\log_9\left[(2)\cdot(2)(2)\cdot(6)\cdot\left(\frac{27}{16}\right)\right]\right\}^{10}}=\log_9\frac{1296}{16}=\log_9 81=2$$

RECURSOS DE INTERNET

El siguiente enlace es el acceso a un recurso en línea done se pueden encontrar herramientas para practicar con números, sus operaciones y propiedades:

http://sauce.pntic.mec.es/jdiego/

2.10 Ejercicios de práctica II

1. Resolver cada una de las operaciones:

   a. $-12+6-8+15-100+24$

   b. $(6)(-3)+(12)(-8)-(-10)(-30)$

   c. $(-12)\div 6+(4)(-36)-(-54)\div(-6)$

   d. $[-12+(8\div 4)]\cdot[(-20+2)\div(-6+3)]$

   e. $-4(6-5)+4\{6-5[12-6(4-10)]\}$

   f. $12-120+50-8+12-9+4$

   g. $\left\{4-2^2\left[7-6\sqrt{-6+36}\right]^3\right\}-1$

   h. $-(4+5)\cdot[(-12+3)\div 3]$

   i. $-\{6+[12\cdot(5-10)]\}+6$

2. Resolver cada una de las operaciones indicadas:

a $\frac{3}{11}+\frac{7}{11}$

b. $-\frac{7}{5}+\frac{9}{8}$

c. $-\frac{3}{5}-\frac{1}{8}+\frac{2}{3}+3$

d. $\frac{3}{20}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}$

e. $-\frac{2}{150}+\frac{4}{75}+\frac{3}{225}$

f. $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$

g. $-\frac{3}{11}\div\frac{9}{22}$

h. $\left(-\frac{5}{4}\right)\left(\frac{11}{10}\right)$

i. $\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{4}{6}\right)\left(-\frac{1}{15}\right)(5)$

j. $\dfrac{1-\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}}{1+\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}}$

3. Calcular cada una de las raíces utilizando las propiedades:

a. $\sqrt{9\cdot 4\cdot 25}$

b. $\sqrt[6]{\left(\frac{5}{2}\right)^3\div\frac{2}{5}}$

c. $\sqrt{36\cdot 100}$

d. $\sqrt[3]{27\div 343}$

e. $\sqrt{\frac{225}{361}}$

f. $\sqrt[3]{3^6\cdot 2^9\cdot(-4)^3}$

g. $\sqrt{27-18}$

h. $\sqrt{81\div\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

m. $\sqrt[6]{(2)^{12}\cdot 729}$

n. $\sqrt{25+144}$

o. $\sqrt[4]{\frac{1}{3^{12}}}$

p. $\sqrt[5]{(-6)^{16}\div 6^6}$

q. $\sqrt[6]{\frac{1}{64}\div 729}$

r. $\sqrt{5^{10}\cdot 5^{-12}}$

s. $\sqrt[3]{(-3)^6\cdot 2^9\cdot 4^3}$

t. $\sqrt[3]{8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3}$

i. $\sqrt{64+36}$

j. $\sqrt[3]{125\cdot(-216)}$

k. $\sqrt{9\cdot64\cdot81\cdot36\cdot169}$

l. $\sqrt[4]{\left(-\frac{8}{5}\right)\div\left(-\frac{80}{2}\right)}$

u. $\sqrt{81\div64}$

v. $\sqrt{169\cdot\frac{1}{36}}$

w. $\sqrt{9\cdot5^{-4}\cdot7^{6}}$

x. $\sqrt[3]{-(512)^{1/3}}$

4. Calcular los siguientes logaritmos:

a. $\log_3\frac{1}{243}$

b. $\log 100$

c. $\log_3 6561$

d. $\log_7 49$

e. $\log_5\frac{25}{625}$

f. $\log_8 512$

g. $\log_6\frac{1}{216}$

h. $\log_4 4096$

i. $\log_{\frac{1}{4}} 16$

j. $\log_5 1953125$

k. $\log_2 512$

l. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{27}{64}$

m. $\log_{10}(10\cdot100)$

n. $\log_9(81\cdot729)$

ñ. $\log_4(256\cdot16)$

o. $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{25}\cdot\frac{2}{5}\right)$

p. $\log_3\left(81\cdot\frac{1}{27}\right)$

q. $\log_2(8\cdot16)$

r. $\log_2(64\cdot1024)$

s. $\log_{\frac{3}{2}} 1$

t. $\log_3 19683$

u. $\log_8\frac{64}{512}$

5. Determinar el valor de los logaritmos:

a. $\log\frac{10000}{10}$

b. $\log_5 125^{10}$

c. $\log\left(\frac{1}{3^2}\cdot9\right)$

d. $\log_2 16^3$

e. $\log_3 9^4$

f. $\log_4\left(\frac{2\cdot8}{8\cdot8}\right)$

g. $\log_{25} 625^2$

h. $\log_{\frac{1}{2}}\left(4\div\frac{1}{16}\right)$

i. $\log_3\left(\frac{1}{81}\cdot3\right)$

j. $\log 100^2$

k. $\log_2\left(\frac{256}{32}\right)$

l. $\log_2 128^{-6}$

6. Use los valores dados para estimar los logaritmos:

$$\log_6 7 = 1{,}086;\ \log_8 10 = 1{,}1073;\ \log_5 20 = 1{,}8614;\ \log_8 5 = 0{,}77398$$

a. $\log 64$

b. $\log_7 216$

c. $\log_{20} 625$

d. $\log_{64} 10$

e. $\log_{512} 10$

f. $\log_{25} 20$

7. Simplificar las expresiones dadas:

a. $\log_8 \sqrt[7]{\left(8^3 \cdot 8^{-2}\right)^{1/3}}$

b. $\log_6\left(\sqrt[8]{(36 \cdot 216)^2}\right) + \log_6 (1296)^3 - \log_6 36$

c. $\sqrt[10]{\left(\log_9\left((\log_5 125)\cdot(\log_6 36)\cdot(\log_7 49)\cdot(\log_2 64)\cdot\left(\log_9\left(9^{\frac{27}{16}}\right)\right)\right)\right)^{\log_2 512}}$

d. $\left(\sqrt[5]{\log_6\left(216^{-\frac{1}{3}}\right)}\right)^{2\log_7 343}$

e. $\log_5\left(\sqrt[8]{\left(\left(\log 10^7\right)\left(\log_{100} 10^{12}\right)\right)^{\log_2 256}}\right)$

f. $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{\log_2 16^{10}}{\log_5 25^9}}}}}\right)^{60}$

g. $1 + \dfrac{\log 100^3}{1 + \dfrac{\sqrt[5]{-32}}{4 + 9^{\frac{1}{2}}}}$

h. $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{125} + \dfrac{2}{5}\sqrt[3]{216} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{343}{512}} - \left(\dfrac{5}{6}\sqrt[3]{27}\right)\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{64}\right)\left(6\sqrt[3]{125}\right) + \dfrac{\dfrac{7}{8}\sqrt[3]{4 \cdot 1024}}{\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{27}}$

i. $\sqrt[8]{\left(\log_9\left((\log_5 125)(\log_6 216)(\log_7 343)(\log_2 512)\left(\log_9\left(81^{\frac{27}{18}}\right)\right)\right)\right)^{\log_3 6561}}$

2.11 Matemáticas y TIC

La presentación interactiva de la calculadora científica *Microsfot mathematics*, permite seleccionar distintos modos de ingresar la información dependiendo de los intereses y del área que se quiera trabajar (Cálculo, Estadística, Trigonometría, Álgebra lineal y Estándar). Para resolver operaciones básicas se emplea lo opción *Estándar.*

El grupo de funciones *Estándar* se muestran en la figura 18.

Figura 18. Grupo de funciones *Estándar de Microsoft Mathematics*

Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

a. Los botones ***x, y, z***; ***mas variables*** y ***almacén***, permiten asignar valores numéricos a variables específicas.

b. El botón ***Factor*** halla la descomposición de una cantidad en sus factores primos. Si es una cantidad algebraica muestra la factorización de dicha expresión.

c. Los botones ***m.c.m.*** y ***m.c.d.*** hallan el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más cantidades.

d. El botón ***Expandir*** encuentra la forma expandida de productos algebraicos indicados (ver capítulo 4).

e. ***Round*** muestra el número entero redondeado más próximo a una cantidad dada.

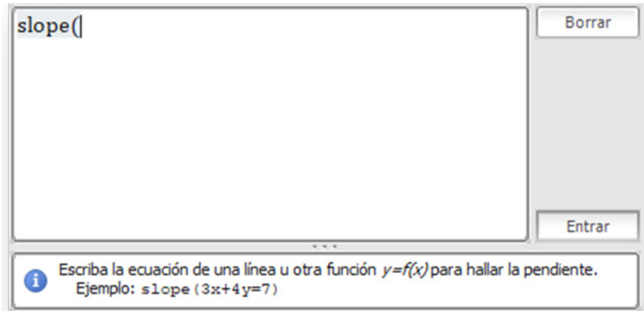
f. ***Pendiente*** calcula la pendiente de una línea o función escrita en forma implícita o explícita (ver capítulo 10).

g. Las teclas ***y, o, xor, no*** son operadores lógicos para evaluar expresiones.

Para ingresar una expresión en el programa esta se puede digitar desde el teclado del computador utilizando las teclas que definen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La potenciación se hace mediante la tecla ^ del teclado estándar o la misma función en el teclado del computador.

Al seleccionar alguna de las funciones del teclado, en el panel de ingreso de la información en la parte inferior aparece una ayuda que permite entender la manera como se ingresa la información de la función seleccionada. La figura 19 es la ayuda que se muestra cuando se selecciona la función ***Pendiente*** del teclado *Estándar.*

Figura 19. Ayuda para la función *Pendiente* en Microsoft Mathematics



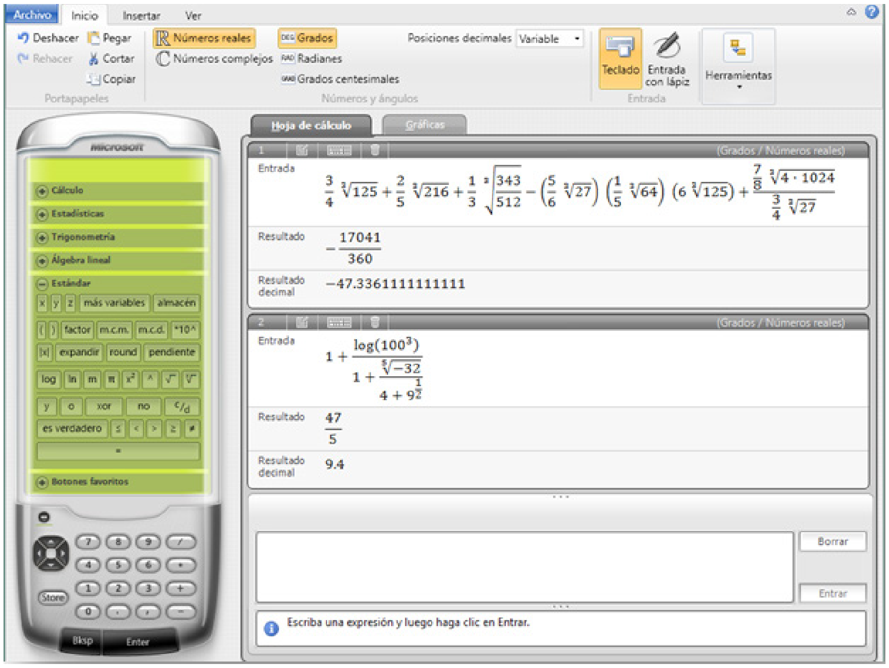
Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

Las soluciones de las operaciones

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{125}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{216}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{343}{512}}-\left(\frac{5}{6}\sqrt[3]{27}\right)\left(\frac{1}{5}\sqrt[3]{64}\right)\left(6\sqrt[3]{125}\right)+\frac{\frac{7}{8}\sqrt[3]{4\cdot 1024}}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{27}} \text{ y } 1+\frac{\log 100^3}{1+\frac{\sqrt[5]{-32}}{4+9^{\frac{1}{2}}}}$$

Se muestran en la figura 20; las funciones se ingresan desde el teclado y utilizando las herramientas de la opción *Estándar.*

Figura 20. Cálculo de expresiones aritméticas con Microsoft Mathematic



Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

Utilizar el programa para hallar el valor de cada expresión

1. $$\frac{\dfrac{2+\frac{1}{3}}{7}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{3}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}}\times\left(\frac{2}{7}\div\frac{4}{19}\right)$$

2. $$\sqrt[3]{\log_3(19683)\cdot\log_4\left(256+\frac{\frac{7}{4}\cdot 6}{5}\right)\left(\sqrt{7+\frac{4}{3}\cdot 8}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}81}}$$

3. Utilice las funciones de la calculadora para establecer la relación entre el m.c.m. y el M.C.D. de dos cantidades.

3. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1 Clasificación de expresiones algebraicas
3.2 Términos semejantes y reducción de términos semejantes
3.3 Suma de polinomios
3.4 Resta de polinomios
3.5 Multiplicación de expresiones algebraicas
3.6 División de polinomios
3.7 Ejercicios de práctica III
3.8 Matemáticas y Tic

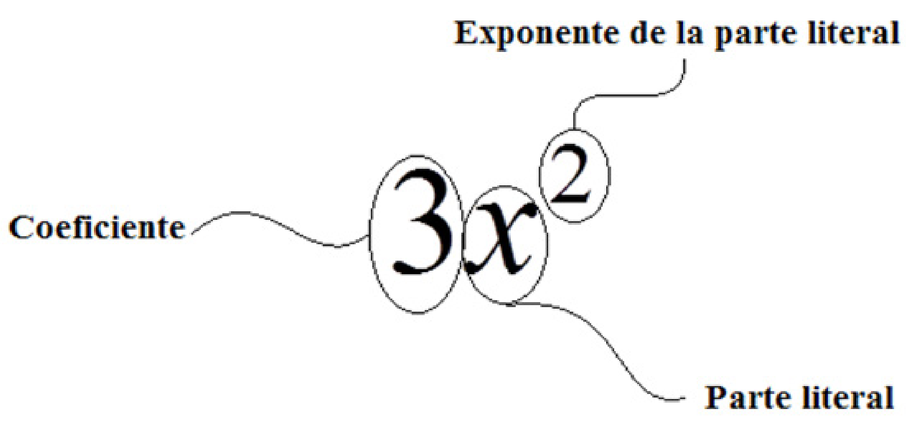
3. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El lenguaje algebraico se ha convertido en una herramienta esencial dentro del campo de la matemática y sus aplicaciones, para convertir las expresiones del lenguaje cotidiano en expresiones del lenguaje simbólico, lo cual es especialmente útil para la solución de problemas (Beceriil y Reyes, 2012).

El lenguaje algebraico traduce en operaciones algunas de las expresiones del lenguaje cotidiano y al trasladar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, se usan las letras del alfabeto y los números para construir expresiones (ver figura 21), las cuales se componen así:

- ***Parte literal***: corresponde al conjunto de letras que representan los elementos desconocidos.
- ***Coeficiente***: es el número que acompaña a la parte literal y se interpreta como una multiplicación entre este y la parte literal
- ***Expresión algebraica***: es una combinación de los elementos anteriores:

Figura 21. Elementos de un término algebraico



Nota: elaboración propia.

3.1 Clasificación de expresiones algebraicas

Leithold (2003, p. 201) indica que las expresiones algebraicas se pueden clasificar de acuerdo con el número de términos que la componen, como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5
Tipos de expresiones algebraicas

Expresión	Ejemplo
Monomio	$3a; -5b; 2x^2y$
Binomio	$2a-5b; a^2-b^2; x^3-y^3$
Trinomio	$x^2+bx+c; 4a^2-5b+1; a+b+c$
Polinomio	$2a-5b$; $a+b+c$; $x^5-x^4y-12x^3y^2+2x^2y^3+xy^4-y^5$

Un polinomio se dice ordenado respecto a una letra si todos los exponentes de dicha letra se encuentran en orden ascendente o descendente. Con base en esto, se puede decir que los siguientes polinomios están ordenados:

$$x^5-x^4y-12x^3y^2+2x^2y^3+xy^4-y^5;\ -3a^2b+10ab^2;\ a+b+c$$

3.2 Términos semejantes y reducción de términos semejantes

En algebra se distinguen ciertos términos algebraicos que tienen entre si una característica común; estos términos son conocidos como ***términos semejantes***. Para que dos o más términos sean semejantes deben tener la misma parte literal cada una con los mismos exponentes (Acevedo et al., 2009).

Reducir los términos semejantes de una expresión algebraica es llevar a un solo término todos aquellos que son semejantes entre sí. Para reducir dos o más términos semejantes, se agrupan los términos de la misma clase y se realizan las operaciones indicadas de suma o resta entre sus coeficientes; la parte literal permanece igual en el término reducido (Acevedo et al., 2009).

Ejemplo 3.1

Reducir los términos semejantes de las expresiones dadas:

a. $-2ab+7ab-10ab+ab$

b. $23xz+12xz-10xz+12xz-xz-12xz$

Solución

a. En este caso se observa que todos los términos de la expresión son semejantes entre sí, por tanto se pueden reducir a uno solo agrupando los términos que tienen igual signo y resolviendo la suma o resta de sus coeficientes:

$$\begin{aligned} -2ab+7ab-10ab+ab &= 7ab+ab-2ab-10ab \\ &= 8ab-12ab \\ &= -4ab \end{aligned}$$

b. En este caso todos los términos de la expresión dada también son semejantes, por tanto, se pueden reducir a uno solo, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 23xz+12xz-10xz+\cancel{12xz}-xz-\cancel{12xz} &= 23xz+12xz-10xz-xz \\ &= 35xz-11xz \\ &= 24xz \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2

Reducir los términos semejantes en cada expresión:

a. $2a^2b-3ab^2+5a^2b+13ab^2-10a^2b$

b. $5a-6b+8c+9a-20c-b+6b-c$

c. $8a^3b^3+4a^4b^3+6a^3b^2-a^3b^2-9a^4b^3-15-5ab^5+8-6ab^5$

Solución

a. En esta expresión se observa que hay términos semejantes de distintas clases, por un lado están los términos con parte literal a^2b y por otro, los términos con parte literal ab^2. Se reducen los términos semejantes de cada clase por separado tal como se muestra a continuación:

$$2a^2b+5a^2b-10a^2b=-3a^2b$$

$$-3ab^2+13ab^2=10ab^2$$

Como estos dos resultados no son semejantes entre sí, entonces la expresión original se reduce a dos términos:

$$2a^2b-3ab^2+5a^2b+13ab^2-10a^2b=-3a^2b+10ab^2$$

b. En esta expresión se observa lo mismo que en el ejemplo anterior, por tanto, se reducen por separado los términos de cada clase:

$$5a+9a=14a$$
$$-6b-b+6b=-b$$
$$8c-20c-c=-13c$$

Luego, como estos términos no son semejantes entre sí, se organizan los elementos en la respuesta de la siguiente manera:

$$5a-6b+8c+9a-20c-b+6b-c=14a-b-13c$$

c. Del mismo modo que en los ejemplos previos, se reducen los términos semejantes de cada clase:

$$4a^4b^3-9a^4b^3=-5a^4b^3$$
$$8a^3b^2+6a^3b^2-a^3b^2=13a^3b^2$$
$$-5ab^5-6ab^5=-11ab^5$$
$$-15+8=-7$$

Se organizan luego los términos reducidos con lo que resulta que:

$$8a^3b^3+4a^4b^3+6a^3b^2-a^3b^2-9a^4b^3-15-5ab^5+8-6ab^5$$
$$=-5a^4b^3+13a^3b^2-11ab^5-7$$

3.3 Suma de polinomios

Cuando se tienen dos o más expresiones algebraicas se puede realizar una suma entre ellas. Para sumar dos o más polinomios se debe aplicar el proceso de reducción de términos semejantes (Arya y Lardner, 2009).

La suma de expresiones algebraicas consiste en la obtención de una sola expresión llamada ***suma*** a partir de dos o más expresiones llamados ***sumandos*** (Arya y Lardner, 2009).

Para sumar dos o más expresiones existen diferentes métodos, aunque el más común consiste en colocar las expresiones una a continuación de la otra y luego reducir los términos semejantes del polinomio resultante (Arya y Lardner, 2009).

Ejemplo 3.3

Hallar la suma de las expresiones en cada caso:

a. $m^3; -4m^2n; 5m^3; -7mn^2; -4m^2n; -5m^3$

b. $-7m^2n + 4n^3; m^3 + 6mn^2 - n^3; -m^3 + 7m^2n + 5n^3$

Solución

a. En este caso se tiene una suma algebraica de 6 términos; lo que se hace entonces es expresar la suma de estos términos en forma simbólica y luego reducir los términos semejantes de la expresión resultante. El resultado de esta reducción de términos es el resultado final de la suma:

$$\begin{aligned}
&m^3 + (-4m^2n) + (5m^3) + (-7mn^2) + (-4m^2n) + (-5m^3) \\
&= m^3 + 5m^3 - 5m^3 - 4m^2n - 4m^2n - 7mn^2 \\
&= m^3 - 8m^2n - 7mn^2
\end{aligned}$$

b. Para este caso se tiene la suma de un binomio con dos trinomios. Aplicando el mismo procedimiento anterior, se expresa en forma simbólica la suma de las tres expresiones y se reducen los términos semejantes en la expresión resultante:

$$\begin{aligned}
&\left(-7m^2n + 4n^3\right) + \left(m^3 + 6mn^2 - n^3\right) + \left(-m^3 + 7m^2n + 5n^3\right) \\
&= -7m^2n + 4n^3 + m^3 + 6mn^2 - n^3 - m^3 + 7m^2n + 5n^3 \\
&= m^3 - m^3 - 7m^2n + 7m^2n + 6mn^2 + 4n^3 - n^3 + 5n^3 \\
&= 6mn^2 + 8n^3
\end{aligned}$$

3.4 Resta de polinomios

Al igual que la resta de cantidades en los números reales, la resta de expresiones algebraicas puede ser vista como un caso especial de la suma. En la resta, dadas dos expresiones llamadas minuendo y sustraendo, se halla una expresión equivalente llamada diferencia (Winsniewski y Gutiérrez Banegas, 2003).

Para restar dos expresiones algebraicas se suma el minuendo con el opuesto o inverso aditivo del sustraendo (Winsniewski y Gutierrez Banegas, 2003).

En términos prácticos para restar dos expresiones algebraicas se escribe una a continuación de la otra con la operación indicada de resta y se elimina el signo de agrupación haciendo la multiplicación de los signos respectiva; el resultado de la reducción de los términos semejantes es el resultado de la resta de las expresiones dadas.

Ejemplo 3.4

De:

a. $x^2 - 3x$ restar $-5x + 6$.

b. $x^2 + y^2 - 3xy$ restar $-y^2 + 3x^2 - 4xy$

c. $\left(1 - x^2 + x^4 - x^3 + 3x - 6x^5\right)$ restar $-x^6 + 8x^4 - 30x^2 + 15x - 24$

Solución

a. En este caso se identifica como minuendo el binomio $x^2 - 3x$ y como sustraendo el binomio $-5x + 6$ De este modo, expresando la resta en forma simbólica, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - 3x\right) - \left(-5x + 6\right) \\
&= x^2 - 3x + 5x - 6 \\
&= x^2 + 2x - 6
\end{aligned}$$

b. Para este ejemplo se tiene que el minuendo es el trinomio $x^2 + y^2 - 3xy$ y el sustraendo es el trinomio $-y^2 + 3x^2 - 4xy$. Escribiendo la resta en forma simbólica, reduciendo términos semejantes y ordenando la expresión resultante, se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 + y^2 - 3xy\right) - \left(-y^2 + 3x^2 - 4xy\right) \\
&= x^2 + y^2 - 3xy + y^2 - 3x^2 + 4xy \\
&= -2x^2 + xy + 2y^2
\end{aligned}$$

c. Como en los ejemplos precedentes, identificando minuendo y sustraendo de la operación planteada y reduciendo términos semejantes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - x^2 + x^4 - x^3 + 3x - 6x^5\right) - \left(-x^6 + 8x^4 - 30x^2 + 15x - 24\right) \\
&= 1 - x^2 + x^4 - x^3 + 3x - 6x^5 + x^6 - 8x^4 + 30x^2 - 15x + 24 \\
&= x^6 - 6x^5 - 7x^4 - x^3 + 29x^2 - 12x + 25
\end{aligned}$$

3.5 Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de expresiones algébricas se hace teniendo en la cuenta las siguientes leyes:

a. ***Ley de los signos:*** Se aplica para la multiplicación de los coeficientes y es la misma ley que se aplica en la multiplicación de números reales (ver figura 22). Esta ley se puede resumir de la siguiente manera:

Figura 22. Ley de signos para la multiplicación

El producto de cantidades de igual signo es positivo.

El producto de cantidades de distinto signo es negativo.

Nota: elaboración propia.

b. ***Ley de los exponentes:*** Esta ley se aplica para el producto de la parte literal y es la misma que se estudió en las propiedades de la potenciación (ver figura 23).

Figura 23. Producto de potencia de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Nota: elaboración propia.

Ejemplo 3.5

Realizar las multiplicaciones indicadas:

a. $\frac{2}{3}a^3b; \frac{1}{9}abc; a^3mn$

b. $-7m^3n \cdot \left(7m^3n^2 - 10n^2 - 6mn\right)$

c. $\left(x^2 + 3xy + 5y^2\right)\left(2x^2 - 5xy + 4y^2\right)$

Solución

a. Este ejemplo corresponde a la multiplicación de tres monomios entre sí. En este caso se multiplican los coeficientes fraccionarios de la manera usual y se aplica el producto de potencias de igual base para las partes literales iguales, tal como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{2}{3}a^3b\right)\cdot\left(\frac{1}{9}abc\right)\cdot\left(a^3mn\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot 1a^{3+1+3}b^{1+1}cmn=\frac{2}{27}a^7b^2cmn \quad R/$$

b. En este ejemplo se muestra la multiplicación de un monomio con un polinomio, para lo cual se procede a multiplicar cada uno de los términos del polinomio con el monomio aplicando sucesivas veces las reglas anteriores:

$$\begin{aligned}&-7m^3n\cdot\left(7m^3n^2-10n^2-6mn\right)\\&=\left(-7m^3n\right)\cdot\left(7m^3n^2\right)+\left(-7m^3n\right)\cdot\left(-10n^2\right)+\left(-7m^3n\right)\cdot\left(-6mn\right)\\&=-49m^6n^3+70m^3n^3+42m^4n^2\end{aligned}$$

c. En este caso se tiene una multiplicación de dos polinomios. Una manera de hallar este producto es multiplicando cada uno de los términos del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor, lo cual es válido gracias a la propiedad distributiva de los números reales. Al final se reducen los términos semejantes de los productos y se organiza la expresión resultante:

» $x^2\left(2x^2-5xy+4y^2\right)=2x^4-5x^3y+4x^2y^2$

» $3xy\left(2x^2-5xy+4y^2\right)=6x^3y-15x^2y^2+12xy^3$

» $5y^2\left(2x^3-5xy+4y^2\right)=10x^3y^2-25xy^3+20y^4$

Con esto, el producto $\left(x^2+3xy+5y^2\right)\left(2x^3-5xy+4y\right)$ se establece así:

$$\left(2x^4-5x^3y+4x^2y^2\right)+\left(6x^3y-15x^2y^2+12xy^3\right)+\left(10x^3y^2-25xy^3+20y^4\right)$$

Reduciendo los términos semejantes de la expresión anterior, se sigue que:

$$\left(x^2+3xy+5y^2\right)\left(2x^3-5xy+4y\right)=2x^4+x^3y-11x^2y^2-13xy^3+20y^4$$

En algebra existen algunos productos que se pueden hacer directamente por simple inspección aplicando unas reglas predefinidas, gracias a que mantienen la misma forma. Estas fórmulas se conocen como ***productos notables*** y dependiendo de la forma que tenga la expresión se pueden aplicar en el producto de expresiones algebraicas. La tabla 6 muestra el nombre, la forma simbólica para cada uno de estos productos y unos ejemplos de aplicación.

Tabla 6

Productos notables

Producto	Ejemplos
Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(x+2)(x-2)=x^2-4$ $(2m^2n-3xy)(2m^2n+3xy)=4m^4n^2-9x^2y^2$ $(\sqrt{3}a^3-1)(\sqrt{3}a^3+1)=3a^6-1$
Cuadrado de un binomio: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	$(x+3)^2=x^2+6x+9$ $\left(3y-\frac{1}{2}\right)^2=9y^2-3y+\frac{1}{4}$ $(\sqrt{5}a^3b+m^4)^2=5a^6b^2+2\sqrt{5}a^3bm^4+m^8$
Cubo de un binomio: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$	$(x+5)^3=x^3+15x^2+75x+125$ $(2y^2-3z)^3=8y^6-36y^4z+54y^2z^2-27z^3$

3.6 División de polinomios

La división de polinomios se hace también aplicando leyes que se han establecido en las operaciones de los números reales (Acevedo et al., 2009).

a. ***Ley de signos***: Se aplica para la división de los coeficientes y es la misma ley que se aplica en la división de números reales, la cual se puede resumir en la figura 24:

Figura 24. Ley de signos para la división

División de cantidades de igual signo da positivo.

División de cantidades de distinto signo da negativo.

Nota: elaboración propia.

b. ***Ley de los exponentes***: Esta ley se aplica para la división de la parte literal de las expresiones algebraicas dadas y consiste en el hecho de que el cociente de potencias de igual base es la misma base elevado a la resta de los exponentes. En símbolos se expresa así (ver figura 25).

Figura 25. Cociente de potencias de igual base

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Nota: elaboración propia.

Ejemplo 3.6

Dividir las expresiones en cada caso:

a. $14a^3b^4 \div \left(-2ab^2\right)$

b. $\dfrac{4a^{x+4}b^{m-1} - 6a^{x+3}b^{m-2} + 8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}}$

c. $\dfrac{-54m^2 + 12mn + 32n^2}{-9m + 8n}$

Solución

a. En este primer ejemplo se tiene una división de dos monomios. Para este caso se aplica el siguiente procedimiento:

   i. Se Aplica la ley de signos para los coeficientes.

   ii. Se dividen los coeficientes de ser posible, en otro caso se deja indicada la división en forma de fraccionarios simplificados.

   iii. Se aplica la ley de los exponentes para las cantidades literales iguales.

Con esto, se sigue que:

$$14a^3b^4 \div \left(-2ab^2\right) = -\frac{14}{7}a^{3-1}b^{4-2} = -7a^2b^2$$

b. En este caso se tiene la división de un polinomio entre un monomio, para lo cual se aplica el mismo procedimiento anterior con cada uno de los términos del dividendo:

» $\dfrac{4a^{x+4}b^{m-1}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} = -\dfrac{4}{2}a^{x+4-(x+2)}b^{m-1-(m-4)} = -2a^2b^3$

» $\dfrac{-6a^{x+3}b^{m-2}}{-2a^{x+2}b^{m-4}}=+\dfrac{6}{2}a^{x+3-(x+2)}b^{m-2-(m-4)}=3ab^2$

» $\dfrac{8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}}=-\dfrac{8}{2}a^{x+2-(x+2)}b^{m-3-(m-4)}=-4b$

Luego, se tiene finalmente que:

$$\frac{4a^{x+4}b^{m-1}-6a^{x+3}b^{m-2}+8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}}=-2a^2b^3+3ab^2-4b$$

c. Este ejemplo muestra una división de un polinomio entre un binomio. Para la división entre dos polinomios se utiliza el siguiente procedimiento:

i. Se organizan las expresiones del dividendo y del divisor.

ii. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, el resultado de esta división se pone en el cociente, así:

$$\begin{array}{l|l} -54m^2+12mn+32n^2 & -9m+8n \\ \cline{2-2} & 6m \end{array}$$

iii. Se multiplica este resultado por cada uno de los términos del divisor y se coloca el resultado debajo de los términos semejantes correspondientes del dividendo, ***cambiando el signo a cada uno de los resultados del producto:***

$$\begin{array}{l|l} -54m^2+12mn+32n^2 & -9m+8n \\ \cline{2-2} +54m^2-48mn & 6m \end{array}$$

iv. Se reducen los términos semejantes que quedaron en columnas:

$$\begin{array}{l|l} -54m^2+12mn+32n^2 & -9m+8n \\ \cline{2-2} \underline{+54m^2-48mn} & 6m \\ \quad / \quad -36mn & \end{array}$$

v. Se baja el siguiente termino al lado del resultado anterior:

$$\begin{array}{l|l} -54m^2+12mn+32n^2 & -9m+8n \\ \cline{2-2} \underline{+54m^2-48mn} & 6m \\ \quad / \quad -36mn+32n^2 & \end{array}$$

vi. Se repite el procedimiento desde el paso *ii* hasta el paso *iv*. El proceso termina cuando la expresión del residuo es de menor grado que la expresión del dividendo.

$$\begin{array}{llll|l}
-54m^2 & +12mn & +32n^2 & & -9m+8n \\ \cline{5-5}
\underline{+54m^2} & \underline{-48mn} & & & 6m+4n \\
\;\;/ & -36mn & +32n^2 & & \\
 & \underline{+36mn} & \underline{-32n^2} & & \\
 & \;\;/ & \;\;/ & &
\end{array}$$

Como el residuo de esta división es cero, se concluye que esta división es exacta y así se tiene que:

$$\frac{-54m^2+12mn+32n^2}{-9m+8n}=6m+4n.$$

RECURSOS DE INTERNET

Existen muchos recursos en línea que permiten explorar diversos temas de matemáticas en distintos ámbitos académicos. En el siguiente enlace podrá explorar varios temas desde niveles básicos hasta niveles avanzados.

https://www.ematematicas.net/

3.7 Ejercicios de práctica III

1. Reducir los polinomios siguientes:

   a. $7a+9b+6a-4b$

   b. $-a+b+2b-2c+3a+2c-3b$

   c. $a+b+c-b-c+2c+a$

   d. $-81x+19y-30z+6y+80x+x-25y$

   e. $5x+11y-9+20x-1-y$

   f. $-6m+8n+5-m-n-6m-11$

   g. $15a^2-6ab-8a^2+20-5ab-31+a^2-ab$

   h. $-3a+4b-6a+81b-114b+31a-a-b$

2. Hallar la suma en cada caso:

   a. $3a+2b-c; 2a+3b+c$

   b. $x^2-7x; x-9; 2x^2+1$

   c. $ab+bc+cd; -8ab+2bc-cd; 7ab-8bc+cd$

   d. $m+n-p; -m-n+p$

   e. $7a-8b+1; 9a+12b-3; b$

   f. $a+b+c; 2a+2b+2c; -3a-3b+3c$

   g. $7x-4y+6; 10x-20y+4z; -5x+12z+y$

   h. $7x^2-2xy+1; 5xy+4x^2; x^2-y^2$

   i. $5m+2n-6; 9-5m-6n; m-m$

   j. $x^4-4x+7; x^3-2x^2+1; 2x-5x^2+1$

3. De

   a. $2a-3b+c$ restar $5a-8b+c$

   b. $6m^6+5m^5n+4m^4n^2+3m^3n^3+2m^2n^4+mn^5$

   c. $6x^2+2x-1$ restar $7x^2-x+2$

   d. a^4 restar $-4a^4+2a^3b+a^2b^2-8ab^3+8b^4$

   e. $8x^3-2$ restar $2x^2-x+1$

   f. $m^{n+1}-6m^{n-2}+8m^{n-3}-19m^{n-6}$ restar $8m^0+5m^{n-2}+3m^{m-3}+2m^{n-5}$

   g. $-5a^3-a^2b+1$ restar $2a^3+2b^3$

   h. $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-1$ restar $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$

   i. $a-b$ restar $b-a$

4. En cada uno de los ejercicios efectúe la operación indicada y simplifique:

a. $(x+4)(x-4)$

b. $a^2-2a\left[3a-5\left(a^2-2\right)\right]\}+7a^2-3a+$

c. $(2t+5x)(27-5x)$

d. $\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$

e. $\left(2xy-\dfrac{x}{y}\right)\left(xy^2+\dfrac{2y}{x}\right)$

f. $(2x+3y)^2+(2x-3y)^2$

g. $3\left\{x^2-5\left[x+2(3-5x)\right]\right\}$

h. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

i. $\dfrac{t^2-2t+7}{\sqrt{t}}$

j. $\dfrac{t^3+2t^2-3t+1}{t\sqrt{t}}$

k. $(x-2y)^2(x+2y)^2$

l. $(x-2y)^{1/2}(x+2y)^{1/3}$

5. Resuelva las divisiones que se indican:

a. $\left(x^2-5x+6\right)\div(x-2)$

b. $\left(6x^2+x-1\right)\div(3x-1)$

c. $\left(t^2+1\right)\div(t-1)$

d. $\left(6x^2-5x+1\right)\div(2x-3)$

e. $\left(x^3+2x^2+x+5\right)\div(x+2)$

f. $x^3\div(x+1)$

6. Resolver las siguientes situaciones empleando las operaciones básicas con expresiones algebraicas:

a. A las 8 am el termómetro marca 15° y de esta hora a las 6 pm baja a razón de 4° por hora. ¿Cuál es la temperatura a las 10, 11, 12, 4 y 6 pm?

b. Qué expresión se debe sumar a x^2-2x+5 para obtener como resultado $2x-5$

c. Restar $-2a^2+3a-5$ de 5 y sumarle este resultado a $8a+5$

d. Simplificar la expresión $(x+y)(x-y)-(x+y)^2$

e. Restar $x^2-3xy+y^2$ de $3x^2-3y^2$ y dividir esta diferencia con el resultado de sumar $5xy+x^2$ con $2x^2+5xy+6y^2$.

f. Dividir la suma de $x^5+x^3-5x^2$; $-2x^4+2x^2-5x$; $6x^3-6x+30$ entre x^2-2x+6.

g. Restar el cociente de $\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{90}ab^2 + \frac{1}{15}b^3$ entre $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ de $\frac{1}{2}a^2 + +ab + \frac{1}{5}b^2$

h. ¿Qué expresión hay que agregarle a la suma de $x+4, x-6$ y x^2+2x para obtener $5x^2-4x+3$?.

i. Una piscina es el doble de ancha que de larga y alrededor hay un camino de dos metros de ancho. Encuentre las dimensiones de la piscina si su área es de $600m^2$.

j. El ingreso total obtenido con la venta de x máquinas fotocopiadoras es

$$I(x) = 0,003x^2 + 2000x$$

Dólares por semana. El costo de la fabricación se ha establecido con base en la siguiente expresión:

$$\text{C(x)}=0,003x^3 + 1000x^2 - 0.0001x - 100000$$

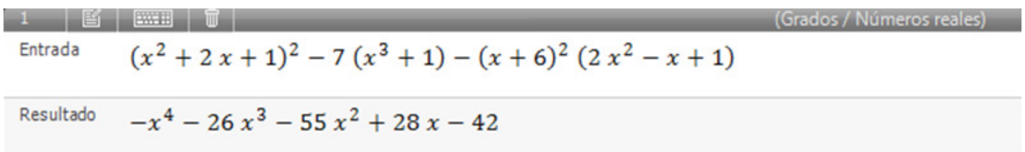
¿Qué expresión define la utilidad de la empresa?

3.8 Matemáticas y TIC

Microsoft Mathematics permite trabajar con variables simbólicas, esto es, expresiones que al ser operadas entre sí no dan como resultado un número sino otra expresión simbólica. Esto resulta especialmente útil para validar operaciones entre expresiones algebraicas.

En la Figura 26 se muestra el resultado de la expresión $(x^2+2x+1)^2 - 7(x^3+1) - (x+6)^2(2x^2-x+1)$ $(x^2+2x+1)^2 - 7(x^3+1) - (x+6)^2(2x^2-x+1)$.

Figura 26. Simplificación de expresiones con Microsoft Mathematics



Nota: tomada del programa Microsofts Mathematics

Cuando se quiera editar una expresión se le da doble clic al panel que dice *entrada* para que la expresión vuelva a aparecer en el espacio donde se ingresan los datos y se puedan cambiar sus valores.

Utilizando este programa, explorar la solución de los siguientes problemas:

1. ¿Qué condiciones para los valores de *k* hacen que el resultado de la división $\frac{x^3+7x^2+24x+36}{x+k}$ sea exacta?

2. Utilice la función *expandir* de los comandos de *Microsoft Mathematics* para hallar los siguientes productos:

   a. $(x+y)^2$
   c. $(x+y)^6$
   b. $(x+y)^3$
   d. $(x+y)^7$
   e. $(x+y)^4$
   g. $(x+y)^8$
   f. $(x+y)^5$
   h. $(x+y)^9$

3. Con base en los resultados de los productos anteriores, responder:

   a. ¿Se observa algún patrón en los exponentes de las partes literales de la expansión de estos binomios?

   b. ¿Se observa algún patrón en los coeficientes de la expansión de estos binomios?

   c. ¿Se podría calcular el resultado de la expansión del binomio $(x+y)^{10}$ con base en los patrones observados en *a* y en *b*?

4. Establezca una fórmula para desarrollar el cuadrado de expresiones como $(2x+5y+4)^2$. ***Sugerencia: utilice la función expand para variables genéricas x, y, z.*** Aplique la fórmula hallada para resolver los siguientes cuadrados:

   a. $(2x+5y+4)^2$
   c. $(1-2a+3b)^2$
   b. $(7x-6y-2z)^2$
   d. $(7m-10n+3)^2$

4. FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

4.1 Factor común en expresiones algebraicas

4.2 Factorización de binomios

4.2.1 Diferencia de cuadrados perfectos

4.2.2 Suma o diferencia de cubos perfectos

4.3 Factorización de trinomios

4.3.1 Trinomio cuadrado perfecto

4.3.2 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

4.3.3 Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

4.4 Factorización de polinomios

4.4.1 Cubo de un binomio

4.4.2 Factor común por agrupación de términos

4.5 Factorización completa

4.6 Ejercicios de práctica IV

4.7 Matemáticas y TIC

4. FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En la sección anterior se estableció que existen ciertos productos que se pueden resolver por simple inspección, aplicando la fórmula del producto notable. En la factorización se realiza un proceso inverso, dada una expresión algebraica, se busca como expresarla como producto de sus factores o divisores (Haeussler y Richard, 2003).

Factorizar una expresión algebraica es determinar los factores o divisores de dicha expresión y representarla como el producto de estos factores (Acevedo et al., 2002).

Según la forma de la expresión a factorizar, se pueden considerar varios casos:

4.1 Factor común en expresiones algebraicas

El factor común de una expresión algebraica es la expresión que se repite en todos los términos de dicha expresión. En palabras más precisas es la expresión que divide a todos los términos de un polinomio dado, también conocido como Máximo Común Divisor (Beceril y Reyes, 2012). Un polinomio puede ser expresado como el producto de su factor común con el resultado de dividir dicho polinomio entre este factor común, tal como se muestra en la figura 27.

Figura 27. Representación general del factor común de una expresión algebraica

$$\begin{pmatrix} \text{Factor Común o} \\ \text{Máximo Común Divisor} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Cociente entre el polinomio} \\ \text{y el factor común.} \end{pmatrix}$$

Fuente de la imagen: Elaboración propia

Ejemplo 4.1

Factorizar cada una de las siguientes expresiones:

a. $ab^3 + 3ab^2 - ab$

b. $15x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 45x$

Solución

a. Para factorizar la expresión dada se aplica el siguiente proceso:

» Se busca el M.C.D. de los coeficientes.

Como en este caso los coeficientes son 1 y 3, se tiene que $M.C.D.(1,3)=1$

» Se halla el M.C.D. o el factor común de la parte literal. Para hacer esto se busca la parte literal que es común a todos los términos de la expresión y se toma aquella con el menor exponente.

En este caso se observa que en todos los términos aparecen la parte literal a y la parte literal b y el menor de los exponentes con los que aparecen los dos es uno, por tanto el *M.C.D.* de la parte literal es ab.

» Se determina el cociente entre el polinomio y el factor común:

$$\frac{ab^3}{ab}+\frac{3ab^2}{ab}-\frac{ab}{ab}=b^2+3b-1$$

» Se expresa el polinomio dado como un producto entre el factor común y el resultado de la división anterior y este sería el resultado de la factorización de **la expresión dada.**

$$ab^3+3ab^2-ab=ab\left(b^2+3b-1\right)$$

b. Aplicando el procedimiento anterior a esta nueva expresión se tiene:

» $M.C.D(15,20,35,45)=5$

» $M.C.D$ de la parte literal: x

» Factor común del polinomio dado: $5x$

» División del polinomio entre el factor común:

$$\frac{15x^4}{5x}+\frac{20x^3}{5x}-\frac{35x^2}{5x}+\frac{45x}{5x}=3x^3+4x^2-7x+9$$

» Representación del polinomio dado como producto de su factor común:

$$15x^4+20x^3-35x^2+45x=5x\left(3x^3+4x^2-7x+9\right)$$

En algunas expresiones el factor común no es necesariamente un monomio como en el caso anterior sino que puede ser un polinomio, en este caso se factoriza en la manera como se ilustra en el ejemplo 4.2.

Ejemplo 4.2

Factorizar cada una de las expresiones:

a. $a(b+2)+4(b+2)$ b. $(b-a)(c+2)-d(c+2)$

Solución

a. En este caso, el factor común es $(b+2)$, puesto que es la expresión que se repite en el polinomio dado. Al dividir cada uno de los términos del polinomio entre su factor común se tiene que:

$$\frac{a(b+2)+4(b+2)}{b+2}=\frac{a\,\cancel{(b+2)}}{\cancel{b+2}}+\frac{4\,\cancel{(b+2)}}{\cancel{b+2}}=a+4$$

Por tanto, la factorización quedaría así:

$$a(b+2)+4(b+2)=(b+2)(a+4)$$

b. Para el caso de la expresión $(b-a)(c+2)-d(c+2)$, se observa que el factor común es $(c+2)$ Luego,

$$\frac{(b-a)\,\cancel{(c+2)}}{\cancel{c+2}}-\frac{d\,\cancel{(c+2)}}{\cancel{c+2}}=b-a-d$$

Y con esto, resulta que:

$$(b-a)(c+2)-d(c+2)=(c+2)(b-a-d)$$

4.2 Factorización de binomios

En la factorización de binomios se consideran dos casos, diferencia de cuadrados perfectos y suma o diferencia de cubos perfectos.

4.2.1 Diferencia de cuadrados perfectos

Una expresión es una diferencia de cuadrados perfectos cuando se restan dos expresiones que tienen raíz cuadrada exacta (Beceriil y Reyes, 2012). Para factorizar una diferencia de cuadrados perfectos se aplica la siguiente regla, la cual se deriva de los productos notables vistos en la tabla 6 del capítulo anterior:

Regla

- Se halla la raíz cuadrada a cada uno de los términos de la diferencia.
- Se multiplica la suma con la diferencia de estas raíces cuadradas.

Ejemplo 4.3

Factorizar los siguientes binomios:

a. $a^2 - b^2$ b. $\frac{36x^4}{49} - \frac{1}{100}$ c. $4x^8 - 25y^{18}$

Solución

a. Aplicando el proceso descrito arriba, resulta que:

$$\sqrt{a^2} = a\,;\sqrt{b^2} = b$$

Por tanto,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

b. Para el caso del binomio $\frac{36x^4}{49} - \frac{1}{100}$ se tiene que:

$$\sqrt{\frac{36x^4}{49}} = \frac{6x^2}{9} \text{ y } \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$$

De esta manera se concluye que:

$$\frac{36x^4}{49} - \frac{1}{100} = \left(\frac{6x^2}{7} - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{6x^2}{7} + \frac{1}{10}\right)$$

c. Para el binomio $4x^8 - 25y^{18}$ se tiene que:

$$\sqrt{4x^8} = 2x^4 \text{ y } \sqrt{25y^{18}} = 5y^9$$

Por tanto,

$$4x^8 - 25y^{18} = \left(2x^4 + 5y^9\right)\left(2x^4 - 5y^9\right)$$

4.2.2 Suma o diferencia de cubos perfectos

Un binomio es una suma o diferencia de cubos perfectos, cuando los dos términos que se suman o restan tienen raíz cubica exacta (Beceriil y Reyes, 2012). Para factorizar estas expresiones se aplica el siguiente procedimiento:

Regla para factorizar una suma o resta de cubos

Una suma o resta de cubos se descompone en dos factores, los cuales se construyen de la siguiente manera:

- Se extraen las raíces cúbicas de los términos del binomio.
- El primer factor es la suma de las raíces cubicas anteriores.
- El segundo factor se construye así:
  i. El primer término es el cuadrado de la primera raíz.
  ii. El segundo término es más o menos el producto de la primera raíz por la segunda.
  iii. El tercer término es mas el cuadrado de la segunda raíz.

En forma simbólica lo anterior se expresa así: (ver figura 28).

Figura 28. Forma general suma o diferencia de cubos perfectos

$$a^3 \pm b^3 = (a+b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

Nota: elaboración propia

Ejemplo 4.4

Factorizar los binomios:

a. $x^3 - 8$

b. $27a^3 + b^6$

c. $27m^6 + 64n^3$

Solución

a. Aplicando los pasos descritos anteriormente, se tiene que:
   $\sqrt[3]{x^3} = x$ y $\sqrt[3]{8} = 2$

Por tanto,

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + x\cdot 2 + 2^2) = (x-2)(x^2+2x+4)$$

b. Para este caso se tiene que:
   $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ y $\sqrt[3]{b^6} = b^3$

Con lo que

$$27a^3+b^6=\left(3a+b^2\right)\left((3a)^2-3a\cdot b^2+\left(b^2\right)^2\right)=\left(3a+b^2\right)\left(9a^2-3ab^2+b^4\right)$$

c. Para este ejemplo se tiene que

$$\sqrt[3]{27m^6}=3m^3 \text{ y } \sqrt[3]{64n^3}=4n$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}27m^6+64n^3&=\left(3m^2+4n\right)\left(\left(3m^2\right)^2-3m^2\cdot 4n+\left(4n\right)^2\right)\\&=\left(3m^2+4n\right)\left(9m^4-12m^2n+16n^2\right)\end{aligned}$$

4.3 Factorización de trinomios

En la factorización de trinomios se consideran también varios casos, dependiendo de la forma como dichos trinomios sean presentados. Se considera el trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma x^2+bx+c y trinomio de la forma ax^2+bx+c. A continuación se muestra la forma como se identifican cada uno y la factorización que se aplica en cada caso.

4.3.1 Trinomio cuadrado perfecto

Una expresión algebraica es un trinomio cuadrado perfecto si satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

» La expresión algebraica consta de tres términos.

» El primer y tercer término del trinomio son cuadrados perfectos (tienen raíz cuadrada exacta).

» El segundo término del trinomio es el doble producto de las raíces del primer y tercer término.

Una vez se ha verificado que una expresión algebraica cumple las tres condiciones anteriores se procede a expresarlo como el cuadrado de un binomio. Al final de la sección 3.3 se mostró que el producto notable $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. La regla para factorizar trinomios cuadrados perfectos se deriva de este producto notable tal como se muestra a continuación:

Regla

» Se halla la raíz cuadrada del primer y tercer término del trinomio.

» Se suman o restan estas raíces según sea el signo del segundo término del trinomio.

» Se eleva la suma o resta de estas raíces al cuadrado.

Ejemplo 4.5

Factorizar los siguientes trinomios como trinomios cuadrados perfectos si se aplica el caso:

a. $x^2 - 2x + 4$

b. $a^2 + 2ab + b^2$

c. $4x^2 - 4x + 1$

d. $16m^2 - 48mn^4 + 36n^8$

Solución

a. Se aplica el proceso descrito arriba:

Se verifica primero si la expresión cumple las condiciones para ser trinomio cuadrado perfecto:

» Posee tres términos.

» Para el primer término, x^2, se tiene que $\sqrt{x^2} = x$; para el tercer término, 4, se tiene también que $\sqrt{4} = 2$ por tanto se cumple la condición de que el primer y tercer términos son cuadrados perfectos.

» Para verificar la tercera condición se tiene que:

$$2(x)(2) = 4x \neq 2x$$

Es decir que el doble producto de las raíces del primer y tercer término no da como resultado el segundo término del trinomio. Por tanto, este trinomio no es un trinomio cuadrado perfecto y no se puede factorizar con la regla descrita.

b. Para el caso del trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ se verifica que $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$ y que el producto $2(a)(b) = 2ab$ coincide con el segundo término del trinomio, por tanto la expresión dada es un trinomio cuadrado perfecto y se puede aplicar la regla dada para su factorización con lo que se tiene que

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

c. Para el trinomio $4x^2-4x+1$ se tiene que $\sqrt{4x^2}=2x$, $\sqrt{1}=1$ y además se tiene que $2(2x)(1)=4x$ con lo que se puede afirmar que el trinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza así:

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$$

d. Finalmente en el caso del trinomio $16m^2-48mn^4+36n^8$ se cumple que $\sqrt{16m^2}=4m$, $\sqrt{36n^8}=6n^4$ y que $2(4m)(6n^4)=48mn^4$, lo cual permite aplicar el proceso de factorización descrito, con lo que se tiene que:

$$16m^2-48mn^4+36n^8=(4m-6n^4)^2$$

4.3.2 Trinomio de la forma x^2+bx+c

Un trinomio se clasifica de esta forma si:

- El primer término es un cuadrado perfecto de coeficiente uno.
- El segundo término es un coeficiente que multiplica la raíz cuadrada del primer término.
- El tercer término es un término independiente de los otros dos (su parte literal es distinta a la de los dos primeros términos).

Si un trinomio cumple las condiciones anteriores, se factoriza siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

Regla

Se descompone en dos factores binomios:

- El primer término de cada factor es la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
- El signo del primer binomio es el signo del segundo término del trinomio; el signo del segundo binomio es el producto de los signos del segundo y tercer término del trinomio.
- Se buscan dos números que multiplicados den el tercer término del trinomio y sumados o restados den el coeficiente del segundo término del trinomio.

Ejemplo 4.6

Factorizar los trinomios:

a. x^2+5x+6 b. a^4-3a^2+3 c. m^6-m^3-12

Solución

Aplicando los pasos descritos anteriormente, se tiene:

a. Este trinomio cumple las condiciones establecidas para que se pueda factorizar con la regla descrita. Como los signos del segundo y tercer término del trinomio son positivos, los signos de cada binomio son positivos, por tanto, se deben buscar dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5, los cuales son 3 y 2. Con esto, se sigue que:

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

b. Se observa que el trinomio a^4-3a^2+3 cumple las condiciones establecidas y se tiene que $\sqrt{a^4}=a^2$; como el segundo término del trinomio es negativo, el signo del primer factor es negativo y como el signo del tercer término del trinomio es positivo, el signo del segundo binomio es negativo puesto que $(-)(+)=-$. De este modo se deben buscar dos números que multiplicados den 3 y sumados den 1, los cuales son 3 y 1. Con esto, se obtiene que:

$$a^4-4a^2+3=(a^2-3)(a^2-1)$$

c. Para la expresión m^6-m^3-12 se tiene que $\sqrt{m^6}=m^3$. Se observa también que el primer binomio tiene un signo negativo y el segundo un signo positivo puesto que $(-)(-)=+$, por tanto, se deben buscar dos números que multiplicados den 12 y restados den uno, a saber 4 y 3. Puesto que se deben conservar los signos en la resta, se pone el número mayor en el primer binomio y el menor en el segundo. Con esto, $m^6-m^3-12=(m^3-4)(m^3+3)$

4.3.3 Trinomios de la forma ax^2+bx+c

Este tipo de trinomios se diferencian del caso anterior en que el coeficiente del primer término es distinto de uno. Uno de los procedimientos que se tienen para factorizar este tipo de trinomios es convertirlo en un trinomio de la forma x^2+bx+c y aplicar el mismo proceso de factorización que se aplicó en los ejemplos anteriores. Para ilustrar este proceso se va a realizar la factorización del trinomio $10x^2+31x+15$:

1. Se organiza el polinomio en la forma dada y se multiplica todo el trinomio por el coeficiente del primer término. Para no alterar el polinomio se divide también por el mismo valor:

$$10x^2+31x+15=\frac{10(10x^2)+10\cdot(31x)+10\cdot 15}{10}$$

2. Se efectúa el producto del primer y tercer término; el segundo término se deja indicado intercambiando los dos números:

$$\frac{100x^2+31\cdot(10x)+150}{10}=\frac{(10x)^2-31(10x)-150}{10}$$

3. Observando el último resultado se nota que esta expresión es un trinomio de la forma x^2+bx+c pues consta de un término que es cuadrado perfecto ($(10x)^2$), un coeficiente por la raíz cuadrada del primer término $(-31(10x))$ y un término independiente; por tanto, se factoriza el trinomio obtenido como el caso anterior, colocando como primer término de cada binomio la raíz cuadrada del primer término del trinomio, los signos positivos en ambos binomios y buscando dos números que multiplicados den 150 y sumados den 31, obteniendo el siguiente resultado:

$$\frac{100x^2+31\cdot(10x)+150}{10}=\frac{(10x+25)(10x+6)}{10}$$

4. Para simplificar el coeficiente que está dividiendo, se sacan los factores comunes a cada uno de los binomios resultantes, si aplica:

$$\frac{(10x+25)(10x+6)}{10}=\frac{5(2x+5)2(5x+3)}{10}$$

5. Puesto que estos coeficientes se están multiplicando, se simplifican con el denominador y este resultado es el resultado final de la factorización:

$$\frac{\cancel{5}(2x+5)\cancel{2}(5x+3)}{\cancel{10}}=(2x+5)(5x+3)$$

4.4 Factorización de polinomios

Cuando la expresión tiene más de tres términos, se pueden aplicar ciertos procedimientos para encontrar su factorización.

4.4.1 Cubo de un binomio

En los productos notables se establece el cubo de un binomio por medio de la siguiente fórmula:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

¿Cómo se puede identificar una expresión que se puede ver como el cubo de un binomio? Para este caso, se debe verificar lo siguiente:

Regla para determinar si una expresión es el cubo de un binomio.

- La expresión debe tener cuatro términos.
- El primer y el cuatro término deben ser cubos perfectos (tener raíz cúbica exacta).
- El segundo término debe ser más o menos tres veces el cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término.
- El tercer término debe ser más tres veces la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.

Si todos los términos del polinomio son positivos, entonces la expresión se factoriza como el cubo de la suma de las raíces cúbicas del primer y cuarto término; si los signos del polinomio son alternados, la expresión se factoriza como el cubo de la resta de las raíces cúbicas del primer y cuarto término.

Ejemplo 4.7

Verificar si cada expresión cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio y si es así efectuar la factorización:

a. $27-27x+9x^2-x^3$

b. $27m^3+108m^2n+144mn^2+64n^3$

c. $8+36x+27x^2+27x^3$

Solución

a. Se verifican cada uno de los cuatro criterios mostrados anteriormente:

- El primer criterio se cumple puesto que la expresión es de cuatro términos.
- El primer y el cuarto término deben ser cubos perfectos. En efecto,

$$\sqrt[3]{27}=3; \sqrt[3]{x^3}=x$$

- El segundo término debe ser más o menos tres veces el cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término.

$$3\cdot 3^2\cdot x=27x$$

» El tercer término debe ser tres veces la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.

$$3\cdot 3\cdot x^2 = 9x^2$$

Puesto que se están cumpliendo todas las condiciones, y los signos del polinomio son alternados, entonces se pude concluir que:

$$27-27x+9x^2-x^3=(3-x)^3$$

b. Para la expresión $27m^3+108m^2n+144mn^2+64n^3$ se verifican cada una de las condiciones puestas:

La expresión efectivamente tiene cuatro términos.

» $\sqrt[3]{27m^3}=3m$; $\sqrt[3]{64n^3}=4n$.

» $3\cdot(3m)^2\cdot 4n=3\cdot 9m^2\cdot 4n=108m^2n$

» $3\cdot 3m\cdot(4n)^2=3\cdot 3m\cdot 16n^2=144mn^2$

Como se verifican las cuatro condiciones, la expresión se puede factorizar como el cubo de la suma de las raíces cubicas:

$$27m^3+108m^2n+144mn^2+64n^3=(3m+4n)^3$$

c. En la expresión $8+36x+27x^2+27x^3$ se tiene que:

» La expresión efectivamente tiene cuatro términos.

» $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{27x^3}=3x$.

» $3\cdot(2)^2\cdot 3x=3\cdot 4\cdot 3x=36x$

» $3\cdot 2\cdot(3x)^2=3\cdot 2\cdot 9x^2=54x^2\neq 27x^2$. No se cumple esta condición.

Como no se cumple una de las condiciones dadas, no se puede factorizar el polinomio como el cubo de un binomio.

4.4.2 Factor común por agrupación de términos

Algunos polinomios no tienen factores comunes a todos sus términos; sin embargo, puede suceder que si existan factores comunes para algunos grupos de ellos. Puesto que la suma es conmutativa, se puede organizar la expresión de modo que se puedan agrupar los términos que tienen factores comunes entre sí. Este procedimiento llevará a la aplicación del caso 4.1 (factor común).

Ejemplo 4.8

Factorizar cada una de las expresiones dadas:

a. $a^2+ab+ax+bx$

b. $2am-2an+2a-m+n-1$

c. $3x^3+2axy+2ay^2-3xy^2-2ax^2-3x^2y$

d. $a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^2-2x^2y$

Solución

a. En este caso se puede hacer la agrupación de varias formas, se pueden agrupar los términos que tienen la *a* como factor común y aquellos que tienen la *x* como factor común, o se pueden agrupar los que tienen *a* como factor común y aquellos que tienen la *b* como factor común. En el primer caso, la agrupación queda así:

$$a^2+ab+ax+bx=\left(a^2+ab\right)+\left(ax+bx\right)$$

Se procede a tomar el factor común de cada uno de los binomios de donde se obtiene que:

$$\left(a^2+ab\right)+\left(ax+bx\right)=a\left(a+b\right)+x\left(a+b\right)$$

En la expresión resultante se nota que la expresión $\left(a+b\right)$ es común para ambos términos, por tanto se puede volver a aplicar el factor común:

$$a\left(a+b\right)+x\left(a+b\right)=\left(a+b\right)\left(a+x\right)$$

De este modo se ha completado la factorización y se puede decir que:

$$a^2+ab+ax+bx=(a+b)(a+x)$$

b. Para la expresión $2am-2an+2a-m+n-1$, puesto que se tienen seis términos se puede hacer una agrupación de términos con factores comunes en dos grupos de tres. Hay que tener cuidado en el momento de poner signos de agrupación que van precedidos por el signo menos, en tal caso los términos que quedan agrupados por este signo de agrupación cambian de signo, tal como se muestra a continuación:

$$2am-2an+2a-m+n-1=(2am-2an+2a)-(m-n+1)$$

Los demás procesos de factorización descritos en el ejemplo anterior se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}&(2am-2an+2a)-(m-n+1)\\&=2a(m-n+1)-(m-n+1)\\&=(m-n+1)(2a-1)\end{aligned}$$

Con esto se tiene que:

$$2am-2an+2a-m+n-1=(m-n+1)(2a-1)$$

c. Para la expresión $3x^3+2axy+2ay^2-3xy^2-2ax^2-3x^2y$ se tiene que:

$$\begin{aligned}&3x^3+2axy+2ay^2-3xy^2-2ax^2-3x^2y\\&=(3x^3-3xy^2-3x^2y)+(2axy+2ay^2-2ax^2)\\&=3x(x^2-y^2-xy)+2a(xy+y^2-x^2)\\&=3x(x^2-y^2-xy)-2a(x^2-y^2-xy)\\&=(x^2-y^2-xy)(3x-2a)\end{aligned}$$

d. En el caso de la expresión $a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^2-2x^2y$, se puede hacer una agrupación de términos con factores comunes en binomios y aplicar el proceso de factorización, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}&a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^2-2x^2y\\&=(a^2x-2a^2y)-(ax^2-2axy)+(x^2-2x^2y)\\&=a^2(x-2y)-ax(x-2y)+x^2(x-2y)\\&=(x-2y)(a^2-ax+x^2)\end{aligned}$$

4.5 Factorización completa

La factorización completa se aplica cuando se quiere ver una expresión como los productos de todos sus factores. Se caracteriza porque para una misma expresión se pueden aplicar varios de los casos estudiados. Para llevar a cabo este proceso lo primero que se debe verificar es si los términos de la expresión dada tienen factores comunes. A continuación se aplican los casos de factorización de binomios o trinomios según el caso.

Ejemplo 4.9

Factorice totalmente cada expresión:

a. $2x^4 - 8x^2$ b. $x^5y^2 - xy^6$ c. $a^5 + a^3 - 2a$

Solución

a. Primero se halla el factor común:

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2\left(x^2 - 4\right)$$

Luego se observa que la expresión que queda dentro de los paréntesis es una diferencia de cuadrados perfectos, por tanto se aplica esta factorización y como la expresión resultante ya no tiene más factorización, este es la factorización completa de la expresión dada:

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2\left(x^2 - 4\right) = 2x^2\left(x - 2\right)\left(x + 2\right)$$

b. Para este ejemplo, se hallan los factores comunes y luego la factorización de binomios como diferencias de cuadrados perfectos en los casos que aplica:

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2\left(x^4 - y^4\right) \\ &= xy^2\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right) \\ &= xy^2\left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right)\left(x - y\right) \end{aligned}$$

c. En el caso del trinomio $a^5 + a^3 - 2a$ se observa inicialmente que se tiene la *a* como factor común, luego se puede aplicar la factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, finalmente se aplica una diferencia de cuadrados perfectos, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a^5 + a^3 - 2a &= a\left(a^4 + a^2 - 2\right) \\ &= a\left(a^2 + 2\right)\left(a^2 - 1\right) \\ &= a\left(a^2 + 2\right)\left(a - 1\right)\left(a + 1\right) \end{aligned}$$

RECURSOS DE INTERNETMAGIA Y MATEMÁTICAS

Existe una variedad de situaciones mágicas y misteriosas donde la matemática aparece para explicar la estrecha relación entre el arte y la ciencia de los números.

https://magiaymatematicas.blogspot.com.co/p/presentacion.html

4.6 Ejercicios de práctica IV

1. Hallar, si es posible, el factor común con coeficientes enteros en cada caso y epresentar la expresión como producto de sus factores:

a. $2x + 2y$

b. $12y^2 - 6x^2$

c. $3xy - 5z$

d. $-18m^2 + 27mn$

e. $100x^2 + 99y^2$

f. $35p^2q^3 - 70p^3$

g. $10x^2y^2 + 12xy^3 - 4xy$

n. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$

o. $4x^2 - 8x + 2$

p. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$

q. $x^{15} - x^{12} + 2x^9 - 3x^6$

r. $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 - 200abc^2$

s. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$

t. $a^2 - 2a^3 + 3a^4 - 4a^5 + 6a^6$

h. $xyz - yz$

i. $5m^3 - 7m^2 + 3m$

j. $-4t + 12u + 16$

k. $a^2 + ab$

l. $5m^2 + 15m^3$

m. $2a^2x + 6ax^2$

u. $a(x+1) + b(x+1)$

v. $2(x-1) + y(x-1)$

w. $a(n+2) + n + 2$

x. $x(a+1) - a - 1$

y. $-m - n + x(m+n)$

z. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$

2. Factorizar los binomios:

a. $x^2 - y^2$

b. $a^2 - 1$

c. $a^2 - 4$

d. $9 - b^2$

e. $1 - 4m^2$

f. $1 - 49a^2b^2$

g. $4x^2 - 81y^4$

h. $a^2b^8 - c^2$

i. $100 - x^2y^6$

j. $a^{10} - 49b^{12}$

k. $16 - n^2$

l. $a^2 - 25$

m. $1 - y^2$

n. $4a^2 - 9$

o. $25 - 36x^4$

p. $25x^2y^4 - 121$

q. $100m^2n^4 - 169y^6$

r. $a^2m^4n^6 - 144$

s. $96x^2y^4 - 225z^{12}$

t. $256a^{12} - 289b^4m^{10}$

3. Descomponer en dos factores:

a. $1 + a^3$

b. $1 - a^3$

c. $x^3 + y^3$

d. $m^3 - n^3$

e. $a^3 - 1$

f. $y^3 + 1$

g. $y^3 - 1$

h. $8x^3 - 1$

i. $1 - 8x^3$

j. $x^3 - 27$

k. $a^3 + 27$

l. $8x^3 + y^3$

m. $27a^3 - b^3$

n. $64 + a^6$

m. $a^3 - 125$

n. $1 - 216m^3$

o. $8a^3 + 27b^6$

p. $x^6 - b^9$

q. $8x^3 - 27y^2$

r. $1 + 343n^3$

4. Factorizar los polinomios:

a. $a^2 - 2ab + b^2$

b. $a^2 + 2ab + b^2$

c. $x^2 - 2x + 1$

f. $9 - 6x + x^2$

g. $16 + 40x^2 + 25x^4$

h. $1 + 49a^2 - 14a$

k. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$

l. $4x^2 - 12xy + 9y^2$

m. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$

d. y^4+1+2y^2

e. $a^2-10a+25$

i. $1-2a^3+a^6$

j. a^8+18a^4+81

n. $1+14x^2y+49x^4y^2$

o. $1+a^{10}-2a^5$

5. Descomponer en dos factores:

a. $x^2+7x+10$

b. x^2-5x+6

c. $x^2-3x-10$

d. x^2+x-2

e. a^2+4a+3

f. $m^2+5m-14$

g. $y^2-9y+20$

h. x^2-6-x

i. x^2-9x+8

j. $c^2+5c-24$

k. x^2-3x+2

l. a^2+7a+6

m. y^2-4y+3

n. $12-8n+n^2$

o. $x^2+10x+21$

6. Factorizar:

a. $2x^2+3x-2$

b. $3x^2-5x-2$

c. $6x^2+7x+2$

d. $5x^2+13x-6$

e. $6x^2-6-5x$

f. $12x^2-x-6$

g. $4a^2+15a+9$

h. $3+11a+10a^2$

i. $12m^2-13m-35$

j. $20y^2+y-1$

7. Factorice totalmente las expresiones:

a. $12x^3+18x$

b. $5ab-8abc$

c. x^2-2x-8

d. $y^2-8y+15$

e. $2x^2+5x+3$

i. x^9-xy^8

j. $a^6+a^3b^3-a^4-ab^3$

k. $4x^4-8x^2+4$

l. a^7-ab^6

m. $2a^4-2a^3-4a^2-2a^2b^2+2ab^2+4b^2$

f. $9x^2-36x-45$

g. $6x^2-5x-6$

h. $r^2-6rs+9s^2$

n. $x^6+5x^5-81x^2-405x$

o. $4ax^2\left(a^2-2ax+x^2\right)-a^3+2a^2x-ax^2$

p. $\left(a^2-ax\right)\left(x^4-82x^2+81\right)$

RECURSOS DE INTERNET

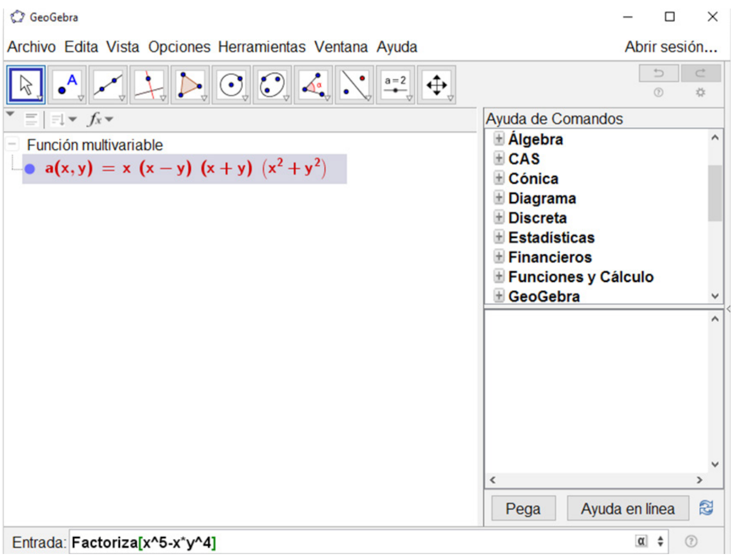
Por medio de recursos interactivos, el aprendizaje de la matemática puede ser más efectivo y placentero. El siguiente recurso en línea le dará la posibilidad de manipular expresiones algebraicas y jugar un poco con esta rama de la matemática.

https://www.vitutor.com/ab/p/a_1e.html

4.7 Matemáticas y TIC

En el área de álgebra, el software *Geogebra* tiene un comando que muestra la factorización de expresiones algebraicas. Para usar esta herramienta, se escribe en la parte inferior el comando *Factoriza [Expresión]* y luego *enter* lo que lleva al resultado en la ventana que dice *Función multivariable.* En la Figura 29 se muestra la factorización completa de la expresión x^5-xy^5.

Figura 29. Factorización completa en GeoGebra



Nota: tomada del programa.

1. Utilizando este complemento, factorizar totalmente las siguientes expresiones:

   a. $x^3+10x^2+27x+18$

   b. x^3-x

   c. $a^2y+ax+bx-b^2y$

   d. $10x^2y^2-72x^2-10y^2+6x^2y-6y+72$

   e. $18x^7-69x^6-147x^5+726x^4-168x^3-981x^2+297x+324$

   f. $x^4+6x^3-24x-16$

Otra de las funciones que integra el paquete *Geogebra* es la expansión o desarrollo de una expresión. El comando utilizado es *Desarrolla [<expresion>]* y en la ventana de ***Vista Algebraica*** aparece el resultado de esta expansión.

2. Utilizando este comando, hallar la expansión de las siguientes expresiones:

   a. $(x+y)^3$ c. $(x+y)^5$ e. $(x+y)^7$

   b. $(x+y)^4$ d. $(x+y)^6$ f. $(x+y)^8$

3. A partir de los resultados de las expansiones anteriores, ¿podría pensarse en una regla general que permita hallar el resultado de una potencia de un binomio?

4. Utilizar el comando *Desarrolla [<expresion>]* para hallar la expansión de las siguientes expresiones:

   a. $(x+y+z)^2$ b. $(x+y-z)^2$ c. $(x+y+z)^3$ d. $(x+y-z)^3$

5. A partir de los resultados anteriores establecer una forma de hallar la expansión de estas potencias con base en las reglas establecidas en la sección 3.5 para el cuadrado y el cubo de un binomio.

6. Consultar sobre el ***Triángulo de Pascal*** y corroborar con base en la consulta los resultados del ejercicio 1.

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

5.1 Suma y resta de fracciones algebraicas

5.2 Multiplicación de fracciones algebraicas

5.3 División de fracciones

5.4 Racionalización de fracciones

5.5 Ejercicios de práctica V

5.6 Matemáticas en la web

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica representa la división o cociente entre dos polinomios (Acevedo et al., 2002). Las siguientes son algunos ejemplos de fracciones algebraicas***:***

$$\frac{3a+6b}{x};\frac{1}{x^2+2x+5};\frac{a}{b}$$

Una de las principales aplicaciones de la factorización es la simplificación de fracciones algebraicas, lo cual se hace aplicando el siguiente procedimiento:

» Factorizar numerador y denominador de las fracciones dadas.

» Cancelar factores comunes al numerador y al denominador.

El ejemplo 5.1 ilustra este proceso.

Ejemplo 5.1

Simplificar la expresión $\frac{4x^2-20x+24}{6+10x-4x^2}$

Solución

En primera medida, se reescribe la fracción de modo que el orden de los polinomios sean los mismos; para hacer esto se agrupa uno de los términos de la fracción, por ejemplo el denominador, y se precede esta agrupación por un signo menos, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{4x^2-20x+24}{6+10x-4x^2}=\frac{4x^2-20x+24}{-\left(4x^2-10x-6\right)}$$

Ahora, se aplica la factorización en cada uno de los polinomios del numerador y denominador y se simplifican los factores que son comunes:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-20x+24}{-\left(4x^2-10x-6\right)}&=\frac{4\cdot\left(x^2-5x+6\right)}{-2\cdot\left(2x^2-5x-3\right)}\\&=-\frac{2\cancel{(x-3)}(x-2)}{(2x+1)\cancel{(x-3)}}\\&=-\frac{2(x-2)}{2x+1}\end{aligned}$$

5.1 Suma y resta de fracciones algebraicas

Para realizar la suma o resta de fracciones algebraicas, se sigue el mismo procedimiento utilizado para sumar o restar fracciones aritméticas (Beceriil y Reyes, 2012):

- Simplificar cada una de las fracciones que intervienen en la suma o resta.
- Hallar el m.c.m entre los denominadores de las fracciones dadas. En este caso consiste en tomar los factores comunes con su mayor exponente y los no comunes
- Dividir el denominador común entre cada denominador y multiplicar el resultado de esta división por el respectivo numerador.
- Simplificar los resultados.

Ejemplo 5.2

Resolver en cada caso:

a. $\frac{2x+5}{x-1}-\frac{7}{x-1}$

b. $\frac{5}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2-4x+4}$

Solución

a. Puesto que estas fracciones son homogéneas, se tiene que:

$$\frac{2x+5}{x-1}-\frac{7}{x-1}=\frac{2x+5-7}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$$

b. Aplicando el proceso descrito arriba se tiene lo siguiente:

- Se factorizan las expresiones que admiten factorización:

$$^{2}-3x+2=(x-2)(x-1;\ x^2-4x+4=(x-2)^2$$

- Se simplifican las fracciones si es el caso. En este ejemplo resulta que:

$$\frac{5}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2-4x+4}=\frac{5}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x-2)^2}$$

- Se halla el m.c.m. de los denominadores. Para este caso el factor común es $(x-2)$ y se toma el que está elevado al cuadrado. Los factores no comunes son $(x-1)$ y $(x+2)$, por tanto, resulta que el m.c.m. es:

$$(x-1)(x+2)(x-2)^2$$

» Se divide el m.c.m. entre cada denominador y se multiplica por el respectivo denominador:

$$\cancel{(x-1)}(x+2)(x-2)^{\cancel{2}}\frac{5}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}}=5(x+2)(x-2);$$

$$(x-1)\cancel{(x+2)}(x-2)^2\frac{1}{\cancel{x+2}}=(x-1)(x-2)^2$$

$$(x-1)(x+2)\cancel{(x-2)^2}\frac{3}{\cancel{(x-2)^2}}=3(x-1)(x+2)$$

Con esto, resolviendo las operaciones indicadas, se tiene que:

$$\frac{5}{3x^2-3x+2}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2-4x+4}$$
$$=\frac{5(x-2)(x+2)-(x-1)(x-2)^2+3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)^2}$$
$$=\frac{-x^3+13x^2-5x-22}{(x-1)(x+2)(x-2)^2}$$

5.2 Multiplicación de fracciones algebraicas

La multiplicación de fracciones algebraicas también sigue el mismo procedimiento que se usa para multiplicación de fracciones aritméticas (Beceriil y Reyes, 2012). En este caso se debe:

» Simplificar cada una de las fracciones.

» Multiplicar las fracciones (multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí).

» Simplificar el resultado obtenido de la multiplicación.

Ejemplo 5.3

Hallar el resultado de la siguiente multiplicación:

$$\frac{x^2-5x+6}{6x^2+18x+12}\cdot\frac{4x^2-16}{2x^2-5x-3}$$

Solución

» Se factorizan cada una de las expresiones dadas:

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

$$6x^2+18x+12=6(x^2+3x+2)=6(x+2)(x+1)$$

$$4x^2-16=4(x^2-4)=4(x-2)(x+2)$$

$$2x^2-5x-3=2x^2-6x+x-3=2x(x-3)+(x-3)=(x-3)(2x+1)$$

» Se realizan los productos indicados y se simplifican los factores comunes del numerador y del denominador:

$$\frac{x^2-5x+6}{6x^2+18x+12}\cdot\frac{4x^2-16}{2x^2-5x-3}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)4(x-2)\cancel{(x+2)}}{6\cancel{(x+2)}(x+1)\cancel{(x-3)}(2x+1)}$$

$$=\frac{2(x-2)^2}{3(x+1)(2x+1)}$$

5.3 División de fracciones

Para dividir fracciones se parte de la siguiente relación:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

De este modo, la división de dos fracciones es la multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Aplicando este procedimiento, se realiza la división entre fracciones algebraicas como un caso particular de la multiplicación.

Ejemplo 5.4

Hallar el resultado de la siguiente división de fracciones:

$$\frac{2x+3}{x-1}\div\frac{x+3}{2x^2-2}$$

Solución

Aplicando el procedimiento descrito, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x+3}{x-1} \div \frac{x+3}{2x^2-2} \\
&= \frac{2x+3}{x-1} \cdot \frac{2x^2-2}{x+3} \\
&= \frac{2x+3}{x-1} \cdot \frac{2\left(x^2-1\right)}{x+3} \\
&= 2\frac{2x+3}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x+3} \\
&= \frac{2(2x+3)(x+1)}{x+3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.5

Simplificar la expresión

$$
\frac{x+2-\dfrac{4}{x-1}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}}
$$

Solución

En primer lugar, se resuelve la operación indicada en el numerador tal como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
x+2-\frac{4}{x-1} &= \frac{(x-1)(x+2)-4}{x-1} \\
&= \frac{x^2+x-6}{x-1}
\end{aligned}
$$

Luego se simplifica la expresión resultante factorizando las expresiones que se puedan factorizar y simplificando los factores comunes del numerador y del denominador, por tanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2-\dfrac{4}{x-1}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}} = \frac{\dfrac{x^2+x-6}{x-1}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}} &= \frac{\left(x^2+x-6\right)\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2-5x+6\right)} \\
&= \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}(x-3)} \\
&= \frac{(x+3)(x+1)}{x-3}
\end{aligned}
$$

5.4 Racionalización de fracciones

La racionalización de una fracción es una operación mediante la cual se eliminan las expresiones radicales, bien sea del numerador o del denominador según el caso (Miller y Hornsby, 2006).

Para racionalizar fracciones que tienen raíces cuadradas en uno de sus términos se multiplica la fracción completa por la expresión conjugada, es decir, aquella que permita eliminar el radical deseado (Acevedo et al., 2009).

Para radicales monomios, basta con multiplicar la fracción dada por una expresión que elimine el exponente de la cantidad subradical.

Ejemplo 5.6

Racionalizar el denominador de cada expresión:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5a}}$

Solución

a. En este caso, el factor racionalizante es la misma raíz cuadrada, puesto que al expresar la raíz en forma de exponente fraccionario y aplicar el producto de potencias de igual base, se cumple que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{(2)^{1/2}(2)^{1/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2^{2/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b. En este caso se tiene que la expresión subradical en forma de potencia queda expresada como $(5a)^{1/3}$ por tanto, para eliminar el exponente fraccionario completando la unidad se debe sumar la fracción $\frac{2}{3}$, con lo que se tiene que:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5a}}=\frac{10}{(5a)^{1/3}}\cdot\frac{(5a)^{2/3}}{(5a)^{2/3}}$$

$$=\frac{10(5a)^{2/3}}{(5a)^{3/3}}=\frac{10(5a)^{2/3}}{5a}$$

$$=\frac{2(5a)^{2/3}}{5a}$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{(5a)^2}}{5a}$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{25a^2}}{5a}$$

Ejemplo 5.7

Racionalizar las expresiones

a. $\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}$ b. $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

Solución

a. Para racionalizar expresiones de la forma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ se multiplica la fracción por la expresión conjugada $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ puesto que de esta forma se tendría el producto $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ el cual es igual $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$ por el producto notable *producto de la suma por la diferencia de dos cantidades*. De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3-\sqrt{2}}&=\frac{2}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\\&=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\&=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}\\&=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{7}\end{aligned}$$

b. De igual manera que en el ejemplo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}&=\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\\&=\frac{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\&=\frac{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x+2-2}\\&=\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

RECURSOS DE INTERNET

InterMatia, es un proyecto generado por la Universidad de Sevilla que sirve como apoyo para el aprendizaje de los temas básicos de matemáticas y al cual se puede acceder a través del siguiente enlace.

https://www.intermatia.com/quienes_somos.php

5.5 Ejercicios de práctica V

1. En cada expresión efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

a. $\dfrac{4x}{2x+3}+\dfrac{6}{2x+3}$

b. $\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{4}{x-2}$

c. $\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{5x-6}{x-3}$

d. $\dfrac{2-3x}{x-1}+\dfrac{x^2}{x-1}$

e $\dfrac{2x+1}{x+2}+3$

f. $\dfrac{3x-2}{x+1}-2$

g. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{3}{2x-1}$

h. $\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{x-2}{x+1}$

i. $\dfrac{1}{x^2+5x-6}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

j. $\dfrac{x}{x^2+2x-3}+\dfrac{1}{1-2x+x^2}$

k. $\dfrac{2}{9x^2+6x+1}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{3x^2+2x-1}$

l. $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$

m. $\left(\dfrac{x^2+4x}{2x+6}\right)\left(\dfrac{2x+4}{x+4}\right)$

n. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-x-2}\cdot\dfrac{x^2+4x+3}{2x^2-5x-3}$

o. $\left(\dfrac{2x^4-2x}{2x^2-5x-3}\right)\left(\dfrac{2x^2-3x-2}{x^3+x^2+x}\right)$

p. $\left(x-\dfrac{3}{x-2}\right)\left(\dfrac{9}{x^2-9}-1\right)$

q. $\left(\dfrac{3x-6}{2x^2+4x+2}\right)\div\left(\dfrac{x^3-x}{x^2+3x+2}\right)$

r. $\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}\div\dfrac{3x^2+5x+2}{2x^2-5x+2}$

s. $\dfrac{\dfrac{x^2+x-2}{2x+3}}{\dfrac{x^2-4}{2x^2+5x+3}}$

t. $\dfrac{x+2+\dfrac{3}{x-2}}{x-6+\dfrac{7}{x+2}}$

u. $\dfrac{p-\dfrac{2}{p+1}}{1-\dfrac{4p+7}{p^2+4p+3}}$

2. Racionalizar el denominador de cada fracción:

a. $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$

b. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

c. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

e. $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$

f. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

h. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

i. $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

j. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

k. $\dfrac{2x-2}{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}$

l. $\dfrac{4-x}{\sqrt{2x+5}-3\sqrt{x}}$

3. Racionalice el numerador de cada una de estas expresiones:

a. $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{2}$

c. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

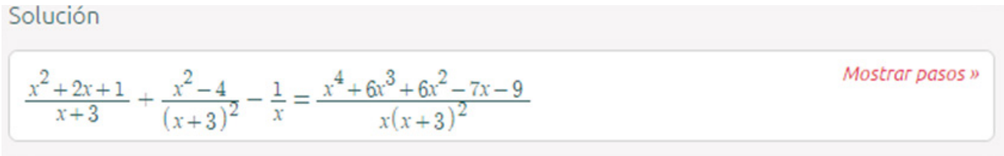
d. $\dfrac{\sqrt{x-2+h}-\sqrt{x-2}}{h}$

5.6 Matemáticas en la web

Symbolab es otro de los tantos recursos que ofrece la web para trabajar con expresiones matemáticas y para la solución de problemas de diversas áreas de la matemática.

Al introducir una expresión en el espacio *enter a problem se* puede ingresar cualquier tipo de expresión desde el teclado o las opciones que vienen por defecto en la tabla de comandos *Basic.* Esto permite realizar un sinnúmero de operaciones, como por ejemplo la simplificación de la expresión $\frac{x^2+2x+1}{x+3}+\frac{x^2-4}{(x+3)^2}-\frac{1}{x}$, cuya simplificación se muestra en la figura 30 y se encuentra ingresando la operación en el panel de entrada y dando clic en la opción *Ir*

Figura 30. Simplificación de expresiones usando *Symbolab*



Nota: tomada de www.symbolab.com

Utilizando esta herramienta, hallar el resultado de las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{2x-5}{x^2+2x-3}}-1$

b. $x+\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}}$

c. $\dfrac{x-8}{x^2-2x+1}+\dfrac{6x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x}$

d. $1+\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x}}$

e. $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}}$

f. $\dfrac{2-x}{x^2-3x}+\dfrac{1}{4x-12}-\dfrac{5}{6x-18}$

g. $\dfrac{x^2-8}{x^2-10x+21}-\dfrac{5-2x}{x^2-10x+21}$

6. ECUACIONES LINEALES

6.1 Problemas de aplicación
6.2 Ejercicios de práctica VI
6.3 Matemáticas y TIC

6. ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones son expresiones algebraicas formadas por dos miembros separados por el signo igual (=) en donde al menos uno de los términos de la expresión es desconocido. A los elementos desconocidos de una ecuación se les conoce como incógnitas y se representan con letras; solucionar una ecuación es hallar el valor de la incógnita que convierte la ecuación en una igualdad (Swokowski, 2004).

Una ecuación se dice de primer grado cuando el máximo exponente con el que aparecen sus variables es uno. También se conocen como ecuaciones lineales (Swokowski, 2004, p. 126).

En una ecuación se identifican los siguientes elementos:

- *Miembros*: son las expresiones algebraicas que aparecen en ambos lados del signo igual.

$$\overbrace{5x+3}^{primer\,miembro} = \overbrace{7x-8}^{Segundo\,miembro}$$

- *Términos:* son cada uno de los sumandos que conforman cada miembro.

$$\underset{1er.}{7m}+\underset{2do.}{7}=\underset{3ro.}{9m}-\underset{4to.}{5}$$

- *Incógnitas:* es el valor desconocido de la ecuación y que se pretende encontrar.

$$12\underbrace{m}_{incognita}+6=13\underbrace{m}_{incognita}-8$$

- *Solución:* Solucionar una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que convierte la ecuación en una igualdad. Por ejemplo, la ecuación $3x+13=10x-1$ tiene como solución $x=2$. La verificación de una solución se hace sustituyendo este valor en la ecuación original y resolviendo las operaciones indicadas. Si el resultado es una identidad la solución es correcta, en caso contrario la solución encontrada no es la correcta. A continuación se muestra la verificación para la ecuación plantada.

$$3(2)+13=10(2)-1$$
$$6+13=20-1$$
$$19=19$$

En términos prácticos, para resolver una ecuación lineal se debe:

- Eliminar los signos de agrupación.
- Eliminar los denominadores si los hay aplicando el método del m.c.m. como en la suma de fracciones.
- Agrupar los términos que posean la incógnita en un miembro y los que son independientes en el otro.
- Reducir los términos semejantes.
- Despejar la variable.

Ejemplo 6.1

A continuación se muestra la forma simplificada de resolver una ecuación:

Tabla 7

Procedimiento analítico para la solución de ecuaciones.

Proceso analítico	Descripción
$5x-3=10x+12$	Ecuación original
$5x-10x=3+12$	Agrupación de los términos
$-5x=15$	Reducción de los términos semejantes
$x=-\frac{15}{5}=-3$	Despeje de la variable

Ejemplo 6.2

Resolver la ecuación $3x+12=15x-4$

Solución

Aplicando los pasos descritos arriba se tiene:

$$3x+12=15x-4$$
$$3x-15x=-4-12$$
$$-12x=-16$$
$$x=\frac{-16}{-12}$$
$$x=\frac{4}{3}$$

Ejemplo 6.3

Resolver cada una de las ecuaciones:

a. $x-4(6-x)=15-6.$

b. $\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right)$

Solución

a. Como no hay denominadores en la expresión dada, se eliminan signos de agrupación:

$$3x-4(6-x)=15-6x$$
$$3x-24+4x=15-6x$$

Se procede luego a realizar la transposición de términos y resolver:

$$3x+4x+6x=15+24$$
$$13x=39$$
$$x=\frac{39}{13}$$
$$x=3$$

b. Para la ecuación $\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right)$ se eliminan primero los signos de agrupación:

$$\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{6}$$

Luego, se multiplica toda la expresión por el m.c.m. de los denominadores, en este caso 12:

$$12\left(\frac{5x}{3}\right)-12\left(\frac{x-2}{4}\right)=12\left(\frac{9}{4}\right)-12\left(\frac{x}{2}\right)+12\left(\frac{2x-1}{6}\right)$$

Al simplificar la expresión anterior queda:

$$4(5x)-3(x-2)=3(9)-6(x)+2(2x-1)$$

Finalmente, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$20x-3x+6=27-6x+4x-2$$
$$20x-3x+6x-4x=27-2+6$$
$$19x=31$$
$$x=\frac{31}{19}$$

Ejemplo 6.4

Resolver las ecuaciones:

a. $(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$ b. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$

Solución

a. Para este caso, se resuelven los productos indicados. Luego se agrupan las incógnitas y se reducen los términos semejantes para despejar la incógnita:

$$(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$$
$$\cancel{12x^2}-9x-16x+12=\cancel{12x^2}-38x+20$$
$$-25x+38x=20-12$$
$$13x=8$$
$$x=\frac{8}{13}$$

b. Para la expresión $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$ se sigue:

» Se resuelven los productos indicados. En este caso hay que aplicar los productos notables cuadrado de un binomio y el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades, vistos en la sección 3.5.

$$7\left(x^2-8x+16\right)-3\left(x^2+10x+25\right)=4(x^2-1)-2$$

» A continuación se eliminan los signos de agrupación y se transponen los términos para despejar la incógnita:

$$7x^2-56x+112-3x^2-30x-75=4x^2-4-2$$
$$\cancel{7x^2-3x^2-4x^2}-56x-30x=-4-2-112+75$$
$$-86x=-43$$
$$x=\frac{-43}{-86}$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 6.5 -Ecuaciones literales

Resuelva la siguiente ecuación para x y para t.

$$\frac{x-2t}{a}=\frac{3(x-y)}{z}$$

Solución

Una ecuación literal es aquella cuya solución queda expresada en términos de otras variables en lugar de un número real específico (Winsniewski, 2003). Para resolver una ecuación literal se aplica el mismo procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores y se consideran los demás términos literales distintos a la incógnita como constantes.

a. Resolver la ecuación $\frac{x-2t}{a}=\frac{3(x-y)}{z}$ para la variable *x* consiste en despejar de ella la variable *x* y considerar las variables *a, t, y, z* como constantes. En este procedimiento se dejan algunas operaciones indicadas.

A continuación se muestra el proceso de la solución de la ecuación planteada para la variable *x:*

$$\frac{x-2t}{a}=\frac{3(x-y)}{z}$$
$$z(x-2t)=3a(x-y)$$
$$xz-2zt=3ax-3ay$$
$$xz-3ax=-3ay+2zt$$
$$x(z-3a)=2zt-3ay$$
$$x=\frac{2zt-3ay}{z-3a}$$

b. Partiendo del mismo procedimiento anterior, se conservan los términos que tienen *t:*

$$\frac{x-2t}{a}=\frac{3(x-y)}{z}$$
$$z(x-2t)=3a(x-y)$$
$$xz-2zt=3ax-3ay$$
$$-2zt=3ax-3ay-xz$$
$$2zt=-3ax+3ay+xz$$
$$t=-\frac{3ax}{2z}+\frac{3ay}{2z}+\frac{x}{2}$$

6.1 Problemas de aplicación

Una de las herramientas matemáticas más utilizadas en la vida cotidiana para la solución de problemas, es el planteamiento de ecuaciones. Una estrategia útil para la solución de este tipo de problemas es la identificación de las expresiones simbólicas que traducen a lenguaje algebraico o simbólico, la información que se da en lenguaje común. Si bien no existe un proceso único y general para la solución de cualquier problema matemático, si se pueden establecer una serie de procedimientos generales que pueden ser de utilidad a la hora de enfrentarse a la búsqueda de soluciones de un problema de este tipo. El siguiente proceso resume este procedimiento:

- ***Paso 1***: Se hace una lectura cuidadosa del problema identificando la información que se da y la información que se pide.
- ***Paso 2:*** Se determinan las incógnitas del problema y se identifican mediante una variable o letra.
- ***Paso 3:*** Se expresa toda la información del problema en términos de las variables declaradas. Esto es equivalente a plantear un modelo formal dentro de la matemática que relacione las variables o incógnitas con la información dada. Para el alcance temático del presente texto, dicho modelo puede ser una ecuación de primer grado, un sistema de ecuaciones lineales (Sección 7) o una ecuación de segundo grado (sección 9), sin embargo, pueden plantease modelos mucho más avanzados y complejos tanto como variables se tengan y la manera como se relacionen entre sí. Estos modelos se estudian en cursos superiores de cálculo y de matemáticas aplicadas.
- ***Paso 4***: Se resuelve el modelo matemático planteado.
- ***Paso 5***: Se comprueba que la solución obtenida sea coherente con el modelo planteado.
- ***Paso 6:*** Se traduce la respuesta algebraica en términos de lo que se plantea en el problema.
- ***Paso 7:*** Se redacta la respuesta a la pregunta planteada en el problema.

Ejemplo 6.6

Encontrar dos enteros consecutivos cuya suma sea 19.

Solución

- Sea x el primero de los enteros.
- Como los dos enteros son consecutivos, el segundo entero se representa mediante la expresión $x+1$
- Puesto que el problema plantea que la suma de los enteros debe ser 19, se plantea la ecuación

$$x+\left(x+1\right)=19$$

» Resolviendo la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 2x+1&=19 \\ x&=\frac{19-1}{2} \\ x&=9 \end{aligned}$$

» Por tanto los dos números pedidos son 9 y 10.

Ejemplo 6.7

La edad de un padre y su hijo suman 55 años, si la edad del padre es el doble de la edad de su hijo aumentada en 10, ¿Qué edades tienen cada uno?

Solución

» Sea *x* la edad del hijo.

» La edad del padre es dos veces la edad su hijo aumentada en 10, por tanto, la edad del padre se puede representar mediante la expresión:

$$2x+10$$

» Como las edades del padre y del hijo suman 55 años, se plantea la siguiente ecuación para relacionar la información del problema:

$$\underbrace{(2x+10)}_{Edad\ del\ Padre}+\underbrace{x}_{Edad\ del\ Hijo}=55$$

» De este modo, el modelo del problema es

$$2x+10+x=55$$

» Resolviendo para *x*, resulta:

$$\begin{aligned} 2x+10+x&=55 \\ 3x&=55-10 \\ x&=\frac{45}{3} \\ x&=15 \end{aligned}$$

» Se tiene por tanto que la edad del hijo es de 15 años y la del padre, que se representó mediante la expresión $2x+10$ es de $2(15)+10=40$ años.

» Verificando la respuesta obtenida con el problema planteado, se confirma que en efecto las edades, tanto del padre como la del hijo, suman 55 años.

6.2 Ejercicios de práctica VI

1. Comprobar si los números al lado de cada ecuación son solución de estas:

   a. $3x+7=12-2x;1$

   b. $5t-3=18+3(1-t); \quad 3$

   c. $\dfrac{u+2}{3u-1}+1=\dfrac{6-u}{u+1}; \quad 2$

   d. $\dfrac{1-2y}{3-y}+y=\dfrac{1}{y+2}; \quad -2$

   e. $\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{2x}=\dfrac{x}{2}; \quad 3$

   f. $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{15}{3x-1}=8; \quad -\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$

2. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

   a. $x-2=5$

   b. $5-2x=10$

   c. $2x+4=-7$

   d. $4x-1=-2$

   e. $-5x+6=10x-5$

   f. $21+6x=27-8x$

   g. $8x-4-3x=8x-14$

   h. $5x+10=10x+5$

   i. $1+8x=10x+3$

   j. $\dfrac{x-2}{2}=2$

   k. $(x+2)-(x-3)=-x$

   l. $((x+1)+(2x+5))=x$

   m. $-((x+5)+5x+2)=7x-6$

   n. $-(x-1)+(2x+5)=-x$

   o. $2x(x+3)-5(x-7)+x(x-1)+2(x^2-7)=-4$

   p. $(4+5x)(4x-5)=(10x+3)(7-2x)$

   q. $(x+10)(2x+5)=(2x-3)(x-4)+7$

   r. $5(1+x)^2-6(x^2+3x-10)=x(x+3)-2x(x-5)-2$

   s. $2(x-3)^2-3(x+1)^2+(x-5)(x-3)+4(x^2-5x+1)=4x^2-12$

3. Resolver las siguientes ecuaciones con denominadores:

a. $\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}$

b. $\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{x-4}{5}$

c. $4-\frac{10x+1}{6}=4x-\frac{16x+3}{4}$

d. $\frac{6x+1}{3}-\frac{11x-2}{9}-\frac{1}{4}(5x-2)=\frac{5}{6}(6x+1)$

e. $\frac{4x+1}{3}=\frac{1}{3}(4x-1)-\frac{13+2x}{6}-\frac{1}{2}(x-3)$

f. $\frac{7x-1}{3}-\frac{5-2x}{2x}-\frac{4x^2-6}{15x}=\frac{7x^2+6}{3x^2}$

g. $9x-2-7x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\frac{x}{2}}{2}+2\frac{3}{4}$

h. $2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$

i. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$

j. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$

k. $10-\frac{3x+5}{6}=3\frac{11}{2}-\frac{\frac{x}{2}}{4}$

l. $\frac{5(y+6)}{4}=-\frac{3(5-y)}{7}$

m. $\frac{5m+5}{6}=\frac{1}{3}+m$

n. $\frac{7}{3}(z+4)=\frac{3}{7}(z-4)$

o. $\frac{\frac{y}{3}-\frac{1}{4}}{y+2}=\frac{6}{5}+8$

4. Resolver cada uno de los siguientes problemas:

a. Un estudiante A tiene 10 monedas más que otro estudiante B, si entre los dos reúnen 76 monedas, ¿Cuál es la cantidad de monedas para cada uno de los estudiantes?

b. La suma de los lados de un rectángulo es 200 cm, si el largo es cuatro veces el ancho, ¿Cuál es el área del rectángulo?

c. Un vendedor visita 50 clientes en tres días. Se sabe que el segundo día visita uno menos que en el primer día y en el tercero visita a cuatro más que en el segundo. ¿Cuántos clientes visitó cada día?

d. En una clase hay 62 estudiantes. El número de mujeres es igual al doble de los hombres aumentado en 10, determine el número de hombres y mujeres en la clase.

e. Un padre es cuatro veces mayor que su hijo. En 10 años, él tendrá el doble de la edad de su hijo. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo actualmente?

f. Hace siete años, una mujer tenía el doble de la edad de su hermano. Encuentre la edad actual de la mujer si la suma de sus edades hoy es de 60 años.

g. Se hacen dos inversiones, una cantidad se invierte al 5% y el doble de esta cantidad al 10%. Si el ingreso total anual por las dos inversiones es de $800.000. ¿Cuánto se invirtió en cada tasa?

h. Un inversionista destina $600,000 a un fondo a fin de obtener ingresos anuales de $50000. Una parte la destinará para un CDT donde le ofrecen un 8% y el resto lo depositará en una cuenta que le paga a un 10.5%. ¿Cuánto deberán invertir en cada opción con objeto de obtener el ingreso requerido?

i. El costo fijo para la producción de un artículo en un negocio casero es de $2.000.000. Si el costo para material y mano de obra es de $600 por artículo producido. Si pueden vender cada artículo en $1000, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de $1.000.000.

j. Un pastelero dispone de 10 tazas de harina de pan para hornear un pastel, si deposita $7/5$ en un recipiente y $4/3$ en otro, ¿Cuánta harina le queda sin usar?

k. Varios competidores se presentaron a 3 competencias deportivas, $25/46$ de ellos participaron en fútbol, $10/23$ se presentaron baloncesto y el $1/46$ restante, que fueron 60 participaron en otras competencias.

 » ¿Cuántas personas en total se presentaron a la competencia?

 » ¿Cuántas personas participaron en cada una de las disciplinas?

l. Un almacenista debe cambiar un producto de su bodega porque ya se encuentra vencido, si sabe que hay 10 productos nuevos más que los vencidos y estos representan $3/4$ del total, ¿Cuántos productos vencidos tiene en su bodega?

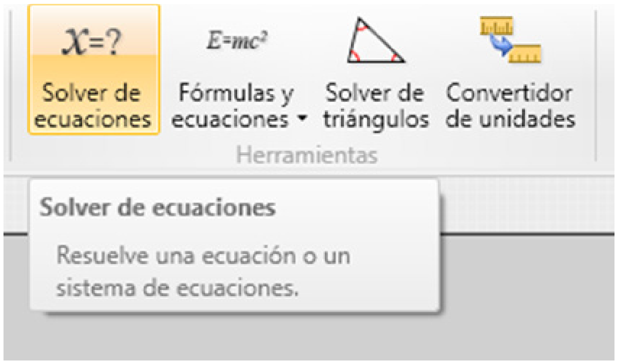
m. Un estudiante tiene la tarea de estudiar 10 horas semanales para la preparación de sus exámenes finales, si al día de hoy ha estudiado $11/4$ de horas, ¿Cuántas horas de estudio le faltan para cumplir su meta?

n. Aquiles le propone un reto a una tortuga para realizar una carrera de 760 m. Para cumplir dicho propósito, la tortuga recorrió inicialmente $1/8$ de la distancia, al día siguiente recorrió $1/7$, al tercer día $1/6$ de la distancia que le faltaba y así sucesivamente, si nunca recorrió menos de 15 m. diarios, ¿en cuántos días cumplió la tortuga su propósito?

6.3 Matemáticas y TIC

En el software *Microsoft Mathematics* existe un complemento que permite resolver distintos tipos de ecuaciones (ver figura 31).

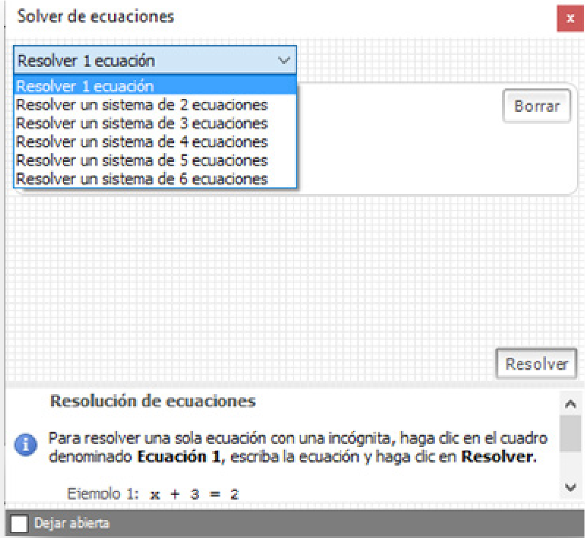
Figura 31. Solver de ecuaciones en Microsoft Mathematics



Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

Al abrir esta herramienta se puede seleccionar distintos tipos de ecuaciones a resolver (ver figura 32).

Figura 32. Selección del número de ecuaciones en Solver de Microsoft Mathematics

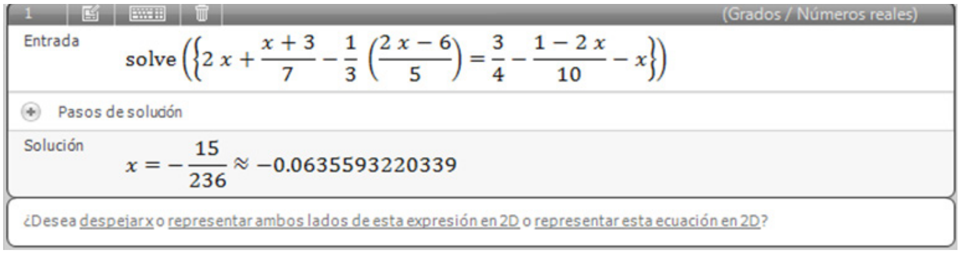


Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

Para resolver una ecuación lineal se selecciona la primera opción y se digita la ecuación a resolver, luego se da clic en resolver y la solución aparece en el panel de entrada – solución. En la figura 33 se muestra la solución de la ecuación.

Figura 33. Panel de entrada para la solución de ecuaciones en Microsoft Mathematics

$$2x+\frac{x+3}{7}-\frac{1}{3}\left(\frac{2x-6}{5}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1-2x}{10}-x.$$



Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

Utilizando este complemento, comprobar si las siguientes ecuaciones tienen solución o no:

a. $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x}=x^2-1$

b. $\dfrac{7}{5}\left(\dfrac{x-6}{12}\right)+\dfrac{2x+5}{36}=\dfrac{2}{3}\left\{\dfrac{5x+6}{13}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9-5x}{10}\right)\right\}$

c. $\dfrac{x+1}{3x}-\dfrac{2x+3}{10x^2}=\dfrac{1+x}{3}$ c. $\dfrac{7x-1}{3}+\dfrac{5-2x}{2x}+\dfrac{4x^2-6}{15x}=-\dfrac{7x^2+6}{3x^2}$

d. $(x+5)^2-x(x+6)=(2x+5)^2-(5-2x)^2+1$

e. $(x-3)^3+(x-2)^2+(x-1)=(x-1)(x+1)-x(x+2)(x-2)$

f. $\left\{\dfrac{x(x-1)^2}{3}+\dfrac{2}{3}(x-1)^3+4\right\}^2=1$

g. $(12x-13)(x+4)-6=(3x+7)(4x+5)+12$

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

7.1 Método de solución por suma o resta

7.2 Método de sustitución

7.3 Método de igualación

7.4 Ejercicios de práctica VII

7.5 Matemáticas y TIC

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Algunos problemas que se resuelven mediante ecuaciones requieren el planteamiento de más de dos ecuaciones cuya solución simultánea resuelve el problema planteado. Este tipo de situaciones se conoce como *sistema de ecuaciones simultáneas.* Cuando las ecuaciones dadas son lineales el sistema de ecuaciones se conoce como sistema de ecuaciones lineales y las que interesan en este texto son las ecuaciones 2×2 (dos ecuaciones dos incógnitas) (Acevedo et al., 2009).

Los ejemplos de esta sección muestran una situación que requiere ser modelada con un sistema 2×2 y expone distintos métodos para su solución.

Ejemplo 7.1

Una fábrica produce puertas y ventanas en dos de sus sedes principales. Si en la sede A cada puerta se comercializa a \$70.000 y las ventanas a \$80.000 produciendo un ingreso de \$4.600.000, en cambio en la sede B cada puerta se vende a \$90.000 y cada ventana a \$110.000 produciendo un ingreso de \$6.200.000. Con base en esta información, ¿se puede saber cuántas puertas y ventanas produce la fábrica?

Para resolver este problema se establece lo siguiente:

x: Número de puertas que se producen.

y: Número de ventanas producidas.

Con esto, las ecuaciones que modelan la situación presentada se escriben así:

$$\begin{cases} 70x + 80y = 46000 \rightarrow Sede\,1 \\ 90x + 110y = 6200 \rightarrow Sede\,2 \end{cases}$$

Para solucionar el anterior problema se plantean dentro de la matemática métodos algebraicos, utilizando las operaciones que ya se han estudiado o también se plantean métodos numéricos apoyados en sistemas computacionales. Cualquier método lleva a encontrar una pareja de valores que al reemplazarlos en las ecuaciones originales satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo (Swokowski, 2005).

A continuación se presentarán los métodos algebraicos más usados:

7.1 Método de solución por suma o resta

La idea de este método es obtener una tercera ecuación que contenga solo una de las incógnitas.

Ejemplo 7.2

Para el sistema de ecuaciones planteado en el ejemplo 7.1, se procede así:

- El sistema original es el siguiente:

$$\begin{cases} 70x+80y=4600 \rightarrow Sede\,1 \\ 90x+110y=6200 \rightarrow Sede\,2 \end{cases}$$

- Simplificando las ecuaciones se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{cases} 7x+8y=460 \\ 9x+11y=620 \end{cases}$$

- Se selecciona una de las variables para eliminarla de la ecuación. En el ejemplo se toma la variable *x*. Como $m.c.m.(7,9)=63$, multiplicamos la ecuación 1 por 9 y la ecuación 2 por 7 para que los dos coeficientes de *x* sean los mismos:

$$\begin{cases} 63x+72y=4140 \\ 63x+77y=4340 \end{cases}$$

- Se resta la segunda ecuación de la primera para eliminar la variable *x:*

$$\begin{cases} 63x+72y=4140 \\ -63x-77y=-4340 \end{cases}$$
$$/ \quad -5y=-200$$

- Se resuelve la ecuación resultante:

$$y=\frac{-200}{-5}$$
$$y=40$$

- Para hallar el valor de la otra incógnita, se reemplaza el valor obtenido anteriormente en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve:

$$7x+8y=460$$
$$7x+8(40)=460$$
$$x=\frac{460-320}{7}$$
$$x=20$$

- De este modo se obtiene que bajo las condiciones presentadas, la fábrica produce 20 puertas y 40 ventanas.

7.2 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones y sustituir la expresión resultante en la otra ecuación dada.

Ejemplo 7.3

Una lancha cuando se dirige río abajo va a una velocidad de 13Km/h y cuando va en contra corriente viaja a una velocidad de 3Km/h. Hallar la velocidad de la lancha en agua tranquila y la velocidad del río.

Asignación de variables.

x : Velocidad de la lancha en agua tranquila.

y : Velocidad del río.

Cuando la lancha va río abajo se suman su velocidad y la del rio, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$x+y=13$$

Cuando la lancha va contracorriente la ecuación que describe su movimiento es:

$$x-y=3$$

Por tanto el sistema que describe al problema es:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el método de sustitución se aplica el siguiente procedimiento:

- Se elige una ecuación para despejar una de las variables, en este caso se decide despejar *x* en la primera ecuación:

$$x+y=13$$
$$x=13-y$$

- Se sustituye la expresión resultante en la segunda ecuación:

$$x-y=3$$
$$13-y-y=3$$

» Se reducen los términos semejantes y se despeja la variable.

$$13-2y=3$$
$$-2y=3-13$$
$$-2y=-10$$
$$y=\frac{-10}{-2}$$
$$y=5$$

» Se sustituye este último valor en la expresión $x=13-y$ obtenida en el primer paso para hallar el valor de la otra incógnita.

$$x=13-y$$
$$x=13-5$$
$$x=8$$

» Se tiene entonces que en aguas tranquilas la lancha viaja a una velocidad de 8Km/h y la velocidad del río es de 5Km/h.

7.3 Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma variable de las dos ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes que conforman una ecuación de una sola incógnita.

Ejemplo 7.4

Resolver el problema del ejemplo 7.1 aplicando el método de igualación

Solución

Para resolver este problema se estableció lo siguiente:

x: Número de puertas que se producen.

y: Número de ventanas producidas.

El modelo de sistema de ecuaciones se presenta así,

$$\begin{cases} 70x+80y=46000 \rightarrow Sede\,1 \\ 90x+110y=6200 \rightarrow Sede\,2 \end{cases}$$

Una forma simplificada de este modelo se presentó en el ejemplo 7.2:

$$\begin{cases} 7x+8y=460 \\ 9x+11y=620 \end{cases}$$

Para aplicar el método de igualación se procede así:

- Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones (por ejemplo, la variable *x)*

$$x = \frac{460 - 8y}{7}\ ;\ x = \frac{620 - 11y}{9}$$

- Se Igualan las dos expresiones resultantes para obtener una ecuación lineal de una sola incógnita y se resuelve esta ecuación. Con esto se obtiene el valor de una de las incógnitas.

$$\frac{460 - 8y}{7} = \frac{620 - 11y}{9}$$
$$9(460 - 8y) = 7(620 - 11y)$$
$$4140 - 72y = 4340 - 77y$$
$$y = 40$$

- Reemplazando este valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones que se despejaron inicialmente, se obtiene la otra solución. En este ejemplo se tiene que:

$$x = \frac{460 - 8y}{7}$$
$$x = \frac{460 - 8(40)}{7}$$
$$x = 20$$

- De este modo se obtiene que bajo las condiciones presentadas, la fábrica produce 20 puertas y 40 ventanas, tal como se estableció en el ejemplo 7.2.

RECURSOS DE INTERNET

Una de las mayores utilidades de la matemática es la solución de problemas cotidianos utilizando las herramientas y conceptos que esta área provee. Utilice todo su ingenio y conocimiento para resolver los problemas interactivos que se muestran en el siguiente enlace:

http://www.genmagic.net/repositorio/thumbnails.php?album=14

7.4 Ejercicios de práctica VII

1. Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método de igualación:

a. $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x+17y=0 \\ 15x+51y=10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x-3y=5 \\ -6y+12x=10 \end{cases}$

e. $\begin{cases} ax+by=c \\ ax-by=c \end{cases}$

f. $\begin{cases} (x-y)-(6x+8y)=-(10x+5y+3) \\ (x+y)-(9y-11x)=2y-2x \end{cases}$

g. $\begin{cases} 12(x+2y)-8(2x+y)=2(5x-6y+3) \\ 20(x+4y)-2=-10 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x-\dfrac{4x+1}{9}=\dfrac{2y-5}{3} \\ y-\dfrac{3y+2}{7}=\dfrac{x+18}{10} \end{cases}$

2. Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método de sustitución:

a. $\begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 7x-4y=5 \\ 9x+8y=13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x+(9x-y)=5y-(2x-9y) \\ 4x-(3y+7)=5y-47 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 4x-7y=6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 9x+16y=7 \\ 4y-3x=0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 12x+5y+6=0 \\ \dfrac{5}{3}x-\dfrac{7}{6}y=-12 \end{cases}$

3. Resolver los siguientes sistemas por reducción:

a. $\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x-2y=-16 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x-5y=-12 \\ 7x-2y=-11 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x+y=13 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+4y=3 \\ 6x-5y=-11 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 5x-5y=-10 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 2x+10y=52 \\ x+\dfrac{y}{2}=8 \end{cases}$

4. Resolver cada una de las siguientes situaciones empleando un planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales:

a. La suma de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su resta es 11. Hallar los números.

b. Una persona compro 5 artículos tipo A y 3 artículos tipo B pagando por todos 4180 dólares. Otra persona lleva 8 artículos del tipo A y 9 del tipo B, pagando 6940 dólares. ¿Cuál es el precio de cada uno de los tipos de artículos?

c. Las masas de dos cajas suman 64 Kg. Si en una barra horizontal con apoyo la primera caja se sitúa a 2.5 m. punto de apoyo y la segunda a 1.5 m. del mismo, quedando en equilibrio. ¿Cuál es la masa de ambas cajas?

d. Dos automóviles que se encuentran a una distancia de 300 kilómetros entre sí se dirigen uno hacia el otro. Sabiendo que se encontrarán dentro de una hora y media y que el auto más rápido le lleva al segundo una diferencia de 15 km/h. ¿Cuál es la velocidad de cada automóvil?

e. Si se suma 9 al numerador y al denominador de una fracción, se obtiene como resultado $8/9$. Si se resta 6 al numerador y denominador de esta fracción se obtiene como resultado la fracción $1/3$. Encontrar la fracción.

f. Una máquina mezcla dos tipos de ingredientes A y B, medidas en kg, para la elaboración de un producto. Se sabe que la cantidad de ingredientes del tipo A es equivalente a los $2/5$ del material del tipo B y que entre los dos tipos de material, se tienen 2460 kg. ¿Cuántos kg de cada tipo se mezclan en la máquina?

g. El largo de un rectángulo es el doble de su ancho y su perímetro es de 24 cm. Hallar la longitud de la diagonal del rectángulo.

7.5 Matemáticas y TIC

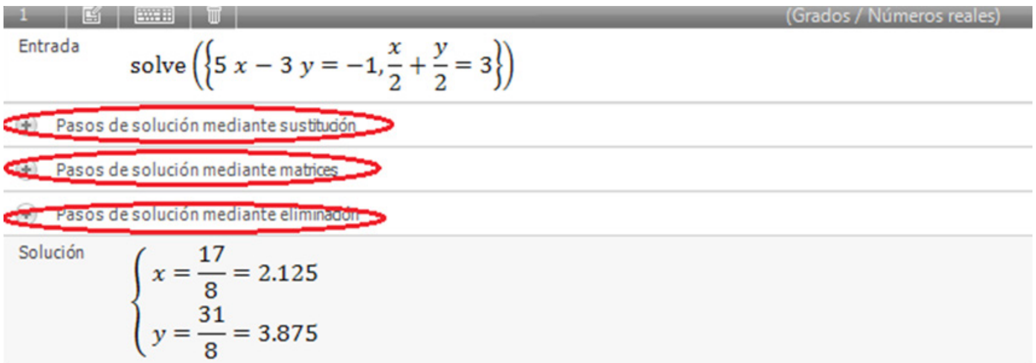
Promedio de *Microsoft Mathematics* también se puede encontrar la solución a un sistema de ecuaciones. Para ello se selecciona en el *solver* de ecuaciones, la opción resolver 2 o más ecuaciones (permite trabajar con un sistema hasta de 6 ecuaciones).

Para revisar por ejemplo la solución al sistema

$$\begin{cases} 5x-3y=-1 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$$

se introducen las ecuaciones al *solver* y se muestra la solución en el panel de entradas y salidas. En esta solución se puede solicitar que se muestren las soluciones paso a paso del sistema mediante los métodos de sustitución, por el método de las matrices o por el método de eliminación (ver figura 34).

Figura 34. Métodos para solución de sistemas de ecuaciones



Nota: tomada del programa Microsoft Mathematics

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el complemento *solver* de *Microsoft Mathematics.* Explorar los diferentes métodos de solución y relacionarlos con la teoría del capítulo.

a. $\begin{cases} 2x+5y-z=12 \\ -x+y+2z=4 \\ x-z=2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x+7y-\dfrac{z}{2}=-2 \\ \dfrac{x+y+2z}{5}=x+y \\ x+y+z=1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y+z}{3}-\dfrac{z}{2}=10x \\ \dfrac{x+y+2z}{2}-2x+4y+z=x+y \\ y+z=1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5(2x-y+12z)=7x-6y \\ -2x+4y+z=x-y \\ 2y+2z=1+3x \end{cases}$

2. Hallar los valores de *k* para los cuales el sistema:

$$\begin{cases} (k+1)x-3y=-1 \\ 3x-(k+1)y=1 \end{cases}$$

   a. Tiene solución

   b. No tiene solución.

3. Reescribir el sistema de ecuaciones anterior con base en las restricciones dadas para la variable *k* y buscar la solución nuevamente mediante el programa:

   a. ¿Qué información muestra el programa?

   b. ¿Cómo se interpreta el hecho de que el sistema no tiene solución?

8. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

8.1 Método de factorización
8.2 Método de la fórmula general
8.3 Método de completación al cuadrado
8.4 Ejercicios de práctica VIII
8.5 Matemáticas en la web

8. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es una igualdad donde el máximo exponente con el que aparece la incógnita es 2, pudiendo aparecer términos con la incógnita de exponente 1 e incluso términos independientes (sin la variable). La ecuación general que se puede plantear para este caso es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Siendo a, b y c constantes, con $a \neq 0$ (Winsniewski y Gutierrez, 2003).

Para resolver una ecuación de segundo grado (también conocidas como ecuaciones cuadráticas) se puede aplicar cualquiera de los siguientes métodos: factorización, fórmula cuadrática y completando el cuadrado. Cualquiera que sea el método que se utilice, la primera etapa en la resolución de ecuaciones de segundo grado, consiste en organizar la expresión en la forma estándar de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, lo cual permite identificar el valor de las constantes *a, b* y *c* (Leithold, 2003).

8.1 Método de factorización

Para aplicar el método de factorización se debe tener en cuenta la siguiente propiedad de los números reales:

Propiedad del factor cero (multiplicación por cero): Si A y B son números reales y $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$ o ambos son iguales a cero (Becerrill, 2012).

Ahora se ilustrará cómo se aplica esto en la solución de ecuaciones de segundo grado:

Ejemplo 8.1

Resolver la ecuación $3\left(x^2+1\right) = 5\left(1-x\right)$

Solución

Reduciendo la expresión dada a la forma general de la ecuación cuadrática resulta:

$$3x^2 + 3 = 5 - 5x$$
$$3x^2 + 3 - 5 + 5x = 0$$
$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Factorizando el miembro izquierdo de esta última ecuación como un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ resulta que:

$$\left(3x-1\right)\left(x+2\right) = 0$$

Aplicando la propiedad del factor cero se sigue que $3x-1=0$ o $x+2=0$. En consecuencia, se tiene que las soluciones de la ecuación dada son $x=\frac{1}{3}$ o $x=-2$

Ejemplo 8.2

Resolver la ecuación $(2x+3)(3x+5)=5$ por el método de factorización.

Solución

Primero se debe igualar el producto de los factores a cero:

$$(2x+3)(3x+5)-5=0$$
$$(6x^2+19x+15)-5=0$$
$$6x^2+19x+10=0$$

Se factoriza el último trinomio obtenido y se resuelve:

$$(3x+2)(2x+5)=0$$

Se utiliza el principio de la multiplicación por cero:

» $3x+2=0$ de donde se sigue que $x=-\frac{2}{3}$

» $2x+5=0$ de donde se sigue que $x=-\frac{5}{2}$

8.2 Método de la fórmula general

Otro de los métodos que se utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado, es aplicando la siguiente fórmula, conocida como fórmula cuadrática o fórmula general para la ecuación de segundo grado (Acevedo et al., 2009):

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El doble signo antes del radical en la ecuación anterior establece las dos soluciones que puede llegar a tener una ecuación de segundo grado, a saber,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A la cantidad sub radical de la fórmula cuadrática se le llama *discriminante*, que se denota por el símbolo Δ y es equivalente a

$$\Delta=b^2-4ac$$

Esta expresión se utiliza para analizar la naturaleza de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado con base en los siguientes criterios:

» Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas (¿por qué?)

» Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real (¿por qué?).

» Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales (¿por qué?).

Ejemplo 8.3

Resolver la ecuación: $5x^2 + 3x - 2 = 0$

Solución

Primero se identifican los coeficientes; $a = 5$, $b = 3$ y $c = -2$, luego las soluciones se calculan así:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{10} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{-3+7}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Ejemplo 8.4

Resolver la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$ aplicando la fórmula general.

Solución

Comparando esta ecuación con la forma general de la ecuación de segundo grado, se nota que $a = 2, b = -1$ y $c = -2$. Aplicando la fórmula general, resulta que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación está dada por:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \text{ y } x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

Como se observa en los ejemplos anteriores, aunque el método de factorización puede ser de fácil aplicación, en algunos casos es imposible su aplicación porque los factores de la expresión no tienen coeficientes racionales, en tal caso, la fórmula llega a la respuesta correcta.

Ejemplo 8.5

Resolver la ecuación $2x^2+5x-1=0$

Solución

Este tipo de trinomio no se puede factorizar por el método propuesto para factorización de trinomios de la forma $ax^2+bx+c=0$, por tanto, aplicando la fórmula general se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)(-1)}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{33}}{4} \end{aligned}$$

Algunas ecuaciones pueden estar planteadas en forma racional, pero pueden ser reducidas a ecuaciones de segundo grado resolviendo las operaciones indicadas entre los términos de dicha ecuación.

Ejemplo 8.6

Resolver la ecuación:

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{x+2}=2$$

Solución

Eliminando los denominadores multiplicando toda la expresión por m.c.m. de los denominadores resulta que:

$$\cancel{x}(x+2)\left(\frac{3}{\cancel{x}}\right)+x\cancel{(x+2)}\left(\frac{5}{\cancel{x+2}}\right)=2x(x+2)$$

Resolviendo la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 3(x+2)+5x &= 2x^2+4x \\ 0 &= 2x^2-4x-6 \\ 0 &= x^2-2x-3 \\ 0 &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $x=3$ o $x=-1$.

8.3 Método de completación al cuadrado

El método de completar al cuadrado se basa en la siguiente propiedad:

Propiedad de la raíz cuadrada: Si $x^2 = a$, donde $a \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{a}$

En este caso, para resolver la ecuación $(x+3)^2 = 16$ no se tiene que llevar la expresión a la forma general de la ecuación cuadrática. Aplicando la propiedad anterior resulta que:

$$(x+3) = \pm\sqrt{16}$$

Es decir,

$$x = 4-3 = 1 \text{ o } x = -4-3 = -7$$

El método de completar al cuadrado permite convertir la expresión dada, en un trinomio cuadrado perfecto, de modo que se pueda aplicar al resultado el procedimiento anterior, el cual se describe en detalle a continuación:

- ***Paso 1:*** Se divide toda la ecuación entre el coeficiente de x^2
- ***Paso 2:*** se lleva el término constante al segundo miembro de la ecuación.
- ***Paso 3:*** se divide el coeficiente de ***x*** entre dos y se suma en ambos miembros de la ecuación el cuadrado del resultado de esta división.
- ***Paso 4:*** Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación como un trinomio cuadrado cuadrado perfecto.
- ***Paso 5***: La solución se obtiene extrayendo la raíz cuadrada a las expresiones de ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 8.7

Resolver la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$ completando al cuadrado.

Solución

- ***Paso 1***: Se divide toda la ecuación entre el coeficiente de x^2, en este caso por 2.

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{2}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

- ***Paso 2:*** se lleva el término constante al segundo miembro de la ecuación.

$$x^2 - \frac{1}{2}x = 1$$

» ***Paso 3:*** se divide el coeficiente de *x* entre dos y se suma en ambos miembros de la ecuación el cuadrado del resultado de esta división

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

» ***Paso 4:*** Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación como un trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

» ***Paso 5***: se extrae la raíz cuadrad en ambos miembros de esta última expresión, con lo que se obtiene que $x - \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ de donde se sigue que $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$, lo cual coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 8.4.

Ejemplo 8.8

En una pared rectangular se sabe que el largo es el doble del alto, más un metro. Si el área de la pared es de 10 m^2, ¿Cuáles son las dimensiones de la pared?

Solución

Sea x la altura de la pared. De este modo el largo de la pared es $2x+1$ metros; el área de la pared está dada por la expresión

$$Area = (L\arg o)(Alto) = (x)(2x+1)$$

Puesto que el área de la pared es de 10 m^2, se tiene la siguiente expresión:

$$2x^2 + x = 10$$
$$2x^2 + x - 10 = 0$$

Al comparar la última expresión con la fórmula cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, resulta que $a = 2; b = 1; c = -10$ Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(10)}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm 9}{4} \end{aligned}$$

Así, $x=\frac{-1+9}{4}=2$ o $x=\frac{-1-9}{4}=-\frac{5}{2}$. De estos se descarta el valor negativo, puesto que x representa una distancia, por tanto, las dimensiones son 2 metros de altura y 5 m de largo.

RECURSOS DE INTERNET

Elementos adicionales a la teoría de ecuaciones de segundo grado y ejercicios que pondrán a prueba la habilidad para resolver ecuaciones de distintos tipos, se podrán encontrar en el siguiente recurso:

http://www.genmagic.net/educa/mod/resource/view.php?inpopup=true&id=83

8.4 Ejercicios de práctica VIII

1. Resuelva las siguientes ecuaciones por el método de factorización:

   a. $x^2+5x+6=0$

   b. $x^2+9x+14=0$

   c. $x^2+4x+4=0$

   d. $x^2-7x+12=0$

   e. $x^2-1=0$

   f. $x^2-8x=0$

   g. $6x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}=0$

   h. $(x+3)(x-3)=x-9$

   i. $x^4-5x^2+4=0$

   j. $x^2-25=0$

   k. $\frac{x^2}{2}+\frac{10}{3}x+2=0$

   l. $6x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$

   m. $x^4-3x^2+2=0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones por la fórmula cuadrática:

   a. $2x^2-4x+2=0$

   b. $2x^2+3x-5=0$

   c. $3x^2-x-2=0$

   d. $3x^2-x-4=0$

   e. $-4x^2-12x-9=0$

   h. $5x(x+2)+6(x+4)=3$

   i. $(4x-1)(2x)=x-4$

   j. $2(x-1)^2=-2(x-1)^2$

   k. $(2x-1)^2=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

f. $4x^2 - 20x + 5 = 0$

g. $2x^2 + 15x - 3 = 0$

l. $x^2 + 3x + 1 = -10$

3. Resolver las siguientes ecuaciones completando al cuadrado:

a. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

b. $3x^2 + 2x - 6 = 0$

c. $x^2 + 3x + 1 = 0$

d. $x^2 - 5x - 5 = 0$

e. $2x^2 - 18x - 7 = 0$

f. $2x^2 - 14x + 1 = -10$

4. Resolver las siguientes ecuaciones por el método más apropiado:

a. $-6x^2 = 10$

b. $x^2 = 2(x-1)(x+2)$

c. $5x^2 + 7 = 0$

d. $6x^2 = 11x$

e. $2(x^2 + 1) = 5x$

g. $3x + 5)(2x - 3) = -8$

f. $15x^2 = 40(x+2)$

h. $3x(2x-5) = -4x - 3$

i. $(2y-3)(y+1) = (y-2)(y+1) - 2$

j. $2x(x+1) = x^2 - 1$

k. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x = x - 1$

l. $5x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{1}{2}x + 1$

m. $2x^2 - 3x - 1 = 0$

n. $(x+1)^2 = 2x^2$

o. $y^4 - 2y^2 - 4 = 0$

5. Resolver cada uno de los siguientes problemas aplicando ecuaciones de segundo grado:

a. Determine dos números que al sumarlo dé como resultado 11 y la suma de sus cuadrados sea 101.

b. Encuentre dos enteros impares consecutivos cuyo producto sea 675.

c. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y su área de 100 centímetros cuadrados. Determine las longitudes de sus lados.

d. Una franja de concreto se construirá alrededor de una cancha rectangular de 30×48 metros. Si el área de la franja representa los $\frac{7}{20}$ del área del jardín, ¿Cuáles son las dimensiones de la franja?

e. Un empresario invirtió 500000 euros en la compra de ciertos artículos. 200 de estos artículos los regaló a amigos y parientes, el resto los comercializó obteniendo una ganancia de 150 euros por artículo. Una vez comercializados todos los artículos se da cuenta de que puede adquirir nuevamente la cantidad inicial de estos mismos y 880 más. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

8.5 Matemáticas en la web

A través de *Symbolab* se pueden solucionar ecuaciones de cualquier grado, mostrando paso a paso la manera como se encuentra esta solución y mostrando, siempre que sea posible, la representación gráfica de dichas ecuaciones. En la figura 35 por ejemplo, se muestra la solución de la ecuación $x^6 - 12x^3 + 4 = 0$.

Figura 35. Solución de ecuaciones cuadráticas

Nota: tomada de www.symbolab.com

Utilizando esta herramienta, determinar las ecuaciones que tienen solución, si es así, explorar los métodos que se emplean para solucionarlas y si no tienen solución, hacer cambios en la expresión hasta que el sistema encuentre una solución a la ecuación dada.

a. $x^{-12} + 4x^6 - 1 = 0$

b. $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1 = 0$

c. $x^{-1/3} + \sqrt[3]{x+7} - 4 = 0$

d. $\dfrac{2x^{-1/2} + 3}{(x+3)^{3/4}} = x$

e. $e^{x+5} + 5 = 6$

f. $\dfrac{1}{5 + \log x} - \dfrac{1}{5 + \log x} = 1$

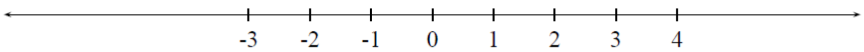
9. DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

9.1 Relación de orden en los reales
9.2 Propiedades de las desigualdades
9.3 Intervalos de números reales
9.4 Ejercicios de práctica IX
9.5 Matemáticas en la web

9. DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

En el capítulo 2 se hizo la construcción del conjunto de los números reales a partir de los conjuntos numéricos que lo conforman. En la construcción de este conjunto, se determinó que una manera de representar gráficamente sus elementos es mediante un diagrama conocido como recta numérica o recta metrizada. En esta recta, a cada punto le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde una única posición lo que lleva a afirmar que dicha recta se encuentre "saturada" de números reales (Courant y Robins, 1979). Bajo estas condiciones los números reales quedan *ordenados* de tal forma que al recorrer la recta de izquierda a derecha se estén recorriendo todos los números reales de menor a mayor (ver figura 36).

Figura 36. Representación gráfica de números reales



Nota: elaboración propia

9.1 Relación de orden en los reales

A partir de la relación de orden en los números reales se puede observar que dados $a, b \in R$ se cumple una y solo una de las siguientes relaciones entre ellos:

- Que *a* es mayor que *b.*
- o que *a* es menor que *b.*
- o que *a* es igual a *b.*

Este conjunto de opciones es conocido como ***propiedad de tricotomía en R*** y permite hacer la comparación, en términos de orden, de dos números reales dados (Acevedo et al., 2009).

Intuitivamente se puede decir que *a* es mayor *b* si *a* se encuentra a la derecha de *b* en la recta numérica. Sin embargo, una manera más precisa de establecer esta relación es como sigue:

Dados números $a, b \in R$ se establece que

- *a* es mayor que *b* (lo cual se escribe $a > b$), si se satisface que $a - b > 0$.
- $a > b$ es equivalente a decir que $b < a$ (*b* es menor que *a*)
- La expresión *a es mayor o igual que b* quiere decir que $a > b$ o que $a = b$, en cuyo caso se escribe $a \geq b$.

Los símbolos $>, <, \leq, \geq$ relacionan expresiones numéricas simbólicas que se conocen con el nombre de ***desigualdades***. Si uno de los términos de una desigualdad se desconoce, la expresión que resulta se conoce como ***inecuación*** (Arya y Lardner, 2009).

9.2 Propiedades de las desigualdades

Las desigualdades cumplen una serie de propiedades las cuales serán de gran utilidad para encontrar el conjunto solución de una inecuación (sección 9.3). Estas propiedades se muestran a continuación:

1. Si $a > b$ y $c \in R$, entonces $a + c > b + c$. (La suma de un término en ambos lados de una desigualdad no cambia el sentido de la desigualdad).

Ejemplo 9.1

a. Se tiene que $5 > 3$, por tanto, $5 + 6 > 3 + 6$ sigue siendo una expresión válida.

b. Se tiene que $-10 > -15$, con lo que $-10 - 3 > -15 - 3$ es una afirmación verdadera.

2. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$. (Transitividad en la relación de orden).

Ejemplo 9.2

a. Se tiene que $5 > 3$ y que $3 > 1$, por tanto se sigue que $5 > 1$.

b. Se observa que $-10 > -15$ y que $-15 > -16$, por tanto, $-10 > -16$

3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$. (la multiplicación de ambos miembros de una desigualdad por una cantidad positiva no cambia el sentido de la desigualdad).

Ejemplo 9.3

a. Se observa que $5 > 3$ y como $6 > 0$ entonces $5 \cdot 6 > 3 \cdot 6$

b. Se tiene que $-10 > -15$, por tanto $-10 \cdot 5 > -15 \cdot 5$.

4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$. (La multiplicación de ambos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa cambia el sentido de la desigualdad).

Ejemplo 9.4

a. Se tiene que $5 > 3$ y como $-6 < 0$ entonces $5 \cdot (-6) < 3 \cdot (-6)$

b. Se tiene que $-10 > -15$, por tanto $(-10) \cdot (-5) < (-15) \cdot (-5)$

5. $ab > 0$ sí y solamente si $(a > 0 \text{ y } b > 0)$ o $(a < 0 \text{ y } b < 0)$. (Ley de signos para la multiplicación, multiplicación de signos iguales)

Ejemplo 9.5

a. $(-5) \cdot (-3) > 0$.

b. $10 \cdot 15 > 0$.

6. $ab < 0$ sí y solamente si $(a > 0 \text{ y } b < 0)$ o $(a < 0 \text{ y } b > 0)$. (Ley de signos para la multiplicación, multiplicación de signos distintos).

Ejemplo 9.6

a. $(-5) \cdot (3) < 0$.

b. $10 \cdot (-15) < 0$.

7. Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$. (Suma de desigualdades del mismo sentido).

Ejemplo 9.7

a. Se tiene que $5 > -2$ y que $7 > 3$, por tanto, $5 + 7 > -2 + 3$

b. Se observa que $-15 > -30$ y $-6 > -20$, de donde se obtiene que $-15 - 6 > -20 - 30$

9.3 Intervalos de números reales

Un intervalo de números reales es un subconjunto de estos números comprendido entre dos valores específicos (Swokowski, 2005). Su utilidad se verá más adelante en la solución de inecuaciones donde a diferencia de las ecuaciones en las que se obtienen valores específicos como conjunto solución, en este caso se obtienen conjuntos infinitos de números reales que constituyen el conjunto solución. Los tipos de intervalos en los reales se definen a continuación:

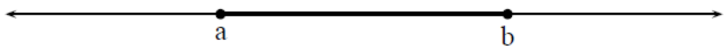
Sean $a, b \in R$ con $a < b$.

1. El ***intervalo cerrado*** entre *a* y *b* es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*. Se denota como $[a,b]$ y se representa en forma de conjunto así,

$$a,b]=\{x\in R:a\leq x\leq b$$

La representación gráfica de este intervalo se muestra en la figura 37.

Figura 37. Representación gráfica intervalo cerrado



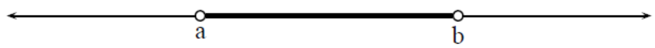
Nota: elaboración propia

2. El ***intervalo abierto*** entre *a* y *b* es el conjunto de todos los números reales mayores que *a* y menores que *b* (A diferencia del anterior, no incluye los valores extremos). Se denota como (a,b) y se representa en forma de conjunto así,

$$(a,b)=\{x\in R:a<x<b\}$$

Su representación gráfica es la de la figura 38.

Figura 38. Representación gráfica intervalo abierto



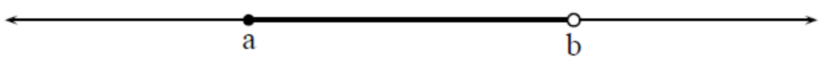
Nota:: elaboración propia

3. El ***intervalo semiabierto a derecha*** entre *a* y *b* es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que *a* y menores que *b* (no incluye el valor a la derecha). Se denota como $[a,b)$ y se representa en forma de conjunto así,

$$[a,b)=\{x\in R:a\leq x<b\}$$

Su representación gráfica es como sigue (ver figura 39):

Figura 39. Representación gráfica intervalo abierto a derecha



Nota: elaboración propia

4. El ***intervalo semiabierto a izquierda*** entre *a* y *b* es el conjunto de todos los números reales mayores que *a* y menores o iguales que *b* (no incluye el valor a la izquierda). Se denota como $(a,b]$ y se representa en forma de conjunto así, $$(a,b]=\{x\in R : a<x\leq b\}$$

5. El ***intervalo infinito a izquierda (o a derecha)*** se define como todos los números reales que son mayores o iguales (o menores o iguales) que *a*.

Las distintas formas de su representación en forma de conjuntos y su correspondiente representación gráfica se muestran a continuación:

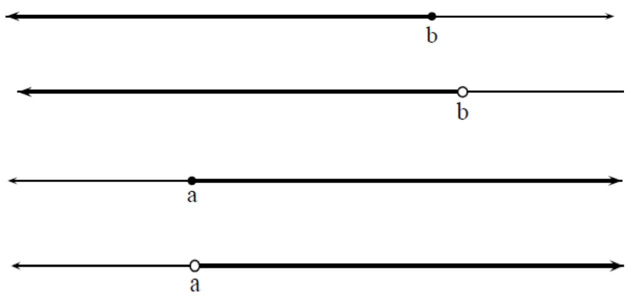
Figura 40. Representación gráfica intervalos al infinito

a. $(-\infty,b]=\{x\in R : x\leq b\}$

b. $(-\infty,b)=\{x\in R : x< b\}$

c. $[a,+\infty)=\{x\in R : x\geq a\}$

d. $(a,+\infty)=\{x\in R : x> a\}$



Nota: elaboración propia

La aplicación directa de estas propiedades se encuentra en la solución de inecuaciones. El conjunto solución de una inecuación es el intervalo de números reales que convierte la inecuación en una desigualdad (Acevedo et al., 2009). Los siguientes ejemplos ilustran la solución de algunas inecuaciones:

Ejemplo 9.8

Encontrar los valores de *x* que satisfacen la inecuación $5x+12<7x+6$.

Solución

Aplicando cada una de las propiedades anteriores se obtiene lo siguiente:

» Se suma a ambos lados -12 y $-7x$ con el fin de agrupar en el miembro izquierdo todas las incógnitas y al lado derecho todas las constantes:

$$5x-7x+12-12<7x-7x+6-12$$
$$-2x<-6$$

» Como la variable a despejar quedó con un coeficiente negativo, se multiplica en ambos lados de la desigualdad por -1 para cambiarle el signo a esta cantidad. Esto cambia el sentido de la desigualdad según la propiedad 4:

$$(-1)\cdot(-2x)<(-6)\cdot(-1)$$
$$2x>6$$

» Se dividen ambos miembros de la inecuación por dos para despejar la variable:

$$2x>6$$
$$\frac{2x}{2}>\frac{6}{2}$$
$$x>3$$

» Convirtiendo esta última expresión en intervalo, se establece que el conjunto solución es (ver figura 41):

Figura 41. Representación gráfica del conjunto solución del ejemplo 9.8.

$$S=\{x\in R: x>3\}=(3,\infty)$$

Nota: elaboración propia

Se observa que si se toma un valor en este intervalo, por ejemplo el 10, y se reemplaza en la inecuación original, se obtiene una expresión verdadera. $5(10)+10=60; 7(10)+6=76$ y 60 < 76, corroborando la desigualdad.

Por otro lado, si se toma un valor que esté por fuera de este intervalo, por ejemplo el 0, y se reemplaza en la inecuación, la expresión que resulta es una expresión falsa: $5(0)+10=10$ en el miembro izquierdo de la inecuación. Por otro lado $7(0)+6=6$ en el caso del miembro derecho de la inecuación dada. Sin embargo $10 \not< 6$ (10 no es menor que 6), por tanto, este valor no forma parte del conjunto solución de la inecuación.

Ejemplo 9.9

Hallar el conjunto solución de la inecuación $x-2\le 2x-3<2+x$.

Solución

Una estrategia que se puede utilizar para la solución de este tipo de inecuaciones es llevar la incógnita al centro de la desigualdad y las constantes a los extremos, aplicando las mismas propiedades que se enunciaron en la sección 9.2, tal como se muestra a continuación:

$$x-2\le 2x-3<2+x$$
$$x-x-2+3\le 2x-x-3+3<2+3+x-x$$
$$1\le x<5$$

Por tanto, la solución es el conjunto,

$$S = \{x : x \in [1,5)\}$$

Ejemplo 9.10

Resolver la inecuación $-2x+4 < 4x-7 \le 3x-1$

Solución

En este caso, no es posible agrupar la variable en el centro de la desigualdad (Verificar), por tanto, se debe resolver por separado cada una de las desigualdades y luego intersectar las soluciones.

Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} -2x+4 &< 4x-7 \\ -2x-4x &< -7-4 \\ -6x &< -11 \\ 6x &> 11 \\ x &> \frac{11}{6} \end{aligned}$$

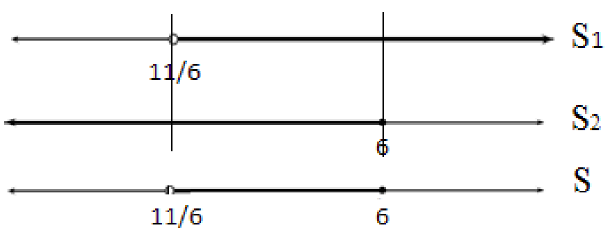
De este modo se tiene que la primera solución parcial es $S_1 = \left(\frac{11}{6}, \infty\right)$.

Por otro lado se sigue que:

$$\begin{aligned} 4x-7 &\le 3x-1 \\ 4x-3x &\le -1+7 \\ x &\le 6 \end{aligned}$$

Con lo que la segunda solución es $S_2 = (-\infty, 6]$. La solución final es $S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{11}{6}, 6\right]$. La representación gráfica de esta solución se muestra en la figura 42.

Figura 42. Intersección de los conjuntos solución para el ejemplo 9.10



Nota: elaboración propia

Ejemplo 9.11

Solucionar la desigualdad $(x-1)(x+1)>0$

Solución

Para resolver este tipo de inecuaciones se aplica la propiedad 5 de la sección 9.3 del producto de factores de igual signo. Basados en esta propiedad se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se determinan los ceros de cada uno de los factores.

$$x-1=0 \text{ si } x=1 \text{ y } x+1=0 \text{ si } x=-1$$

2. Se ubican estos valores en la recta numérica (ver figura 43):

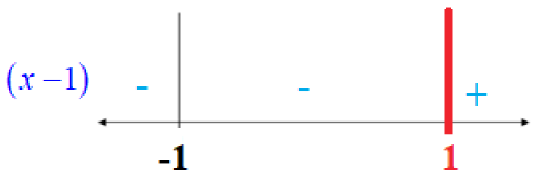
Figura 43. Ubicación de los ceros para cada factor

Nota: elaboración propia

3. A la derecha de cada valor que representa un cero se pone signo **+**; a la izquierda se pone un signo **-**.

Para el factor $x-1$ se obtiene el diagrama de la figura 44.

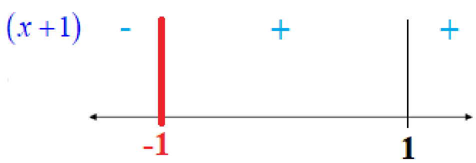
Figura 44. Ubicación de los signos para el primer factor



Nota: elaboración propia

Para el factor $x+1$ se obtiene el diagrama de la figura 45.

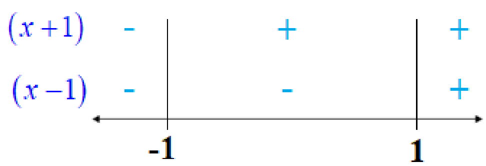
Figura 45. Ubicación de los signos para el segundo factor



Nota: elaboración propia

El diagrama con los todos los valores se muestra en la figura 46.

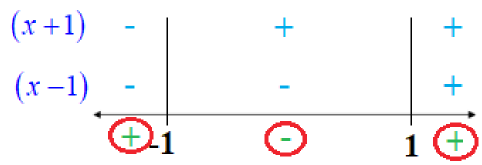
Figura 46. Diagrama de factores completo



Nota: elaboración propia

4. Se multiplican los signos en columna (ver figura 47).

Figura 47. Multiplicación de los signos de los factores por intervalo



Nota: elaboración propia

5. Se seleccionan los intervalos que correspondan al signo de la inecuación dada. En el ejemplo, como la desigualdad original establece que el producto debe ser mayor que cero, se seleccionan los intervalos donde el producto de los signos es positivo:

$$S=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

Los extremos no se incluyen por que la desigualdad es estricta.

Ejemplo 9.12

Resolver la inecuación $\dfrac{x(2x+1)}{x+3}\leq 0$

Solución

Como la ley de signos para la multiplicación es la misma que para la división se puede aplicar el mismo procedimiento que el ejemplo 9.11.

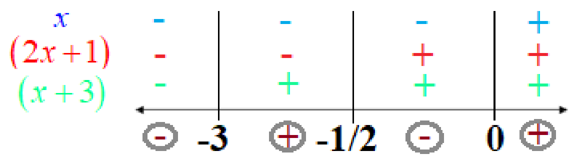
- El primer factor, x, se hace cero en $x=0$.
- El factor $2x+1=0$ si $x=-\dfrac{1}{2}$.
- El factor $x+3=0$ si $x=-3$.

Ubicando estos ceros en la recta numérica, estableciendo los signos por cada intervalo y multiplicando los signos, se obtiene el diagrama de la figura 48.

Como la desigualdad original se plantea en términos de ≤ 0, se seleccionan los intervalos donde el producto es negativo y por tanto, el conjunto solución para la inecuación planteada es:

$$S=(-\infty,-3)\cup\left[-\frac{1}{2},0\right]$$

Figura 48. Signos para cada uno de los factores del ejemplo 9.12



Nota: elaboración propia

9.4 Ejercicios de práctica IX

1. Resolver las siguientes desigualdades:

a. $2x+5<3$

b. $-7x+6>4$

c. $x+12\leq 12-5x$

d. $-4x+5\geq 12x-6$

e. $\frac{5}{3}x+2\leq\frac{1}{9}x-7$

f. $-\frac{3}{4}m-7\leq\frac{2}{9}m-\frac{3}{4}$

g. $\frac{7}{4}p-7\leq\frac{7}{4}p-\frac{3}{4}$

h. $4x^2-6x+1<(2x-3)^2$

j. $\sqrt{2y+4}<\sqrt{5y+1}$

k. $\sqrt[3]{3m-6}<7$

2. Hallar el conjunto solución de cada una de las inecuaciones:

a. $-4\leq 5x+6\leq 12$

b. $0\leq -2x-3\leq\frac{7}{3}$

e. $4\leq\frac{3y-10}{y+7}<24$

f. $x<x^2-12<4x$

c. $-\frac{1}{2} \leq \frac{x+3}{2} < \frac{7}{3}$

g. $\frac{1}{6} < \frac{2x-13}{12} < \frac{2}{3}$

d. $x+3 < 4x-12 < x+8$

h. $-\frac{1}{2} < \frac{4-3z}{5} \leq \frac{1}{4}$

3. Hallar la solución de cada expresión:

a. $7x+6)(2x-1) > 0$

b. $x(x-6) \geq 0$

c. $x^2 - 5x + 6 < 0$

d. $3x^2 - 3x + 6 < 2x^2 + 4$

e. $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$

f. $4x^2 - 12x > 0$

g. $x^2 < x + 2$

h. $x^2 \leq 9$

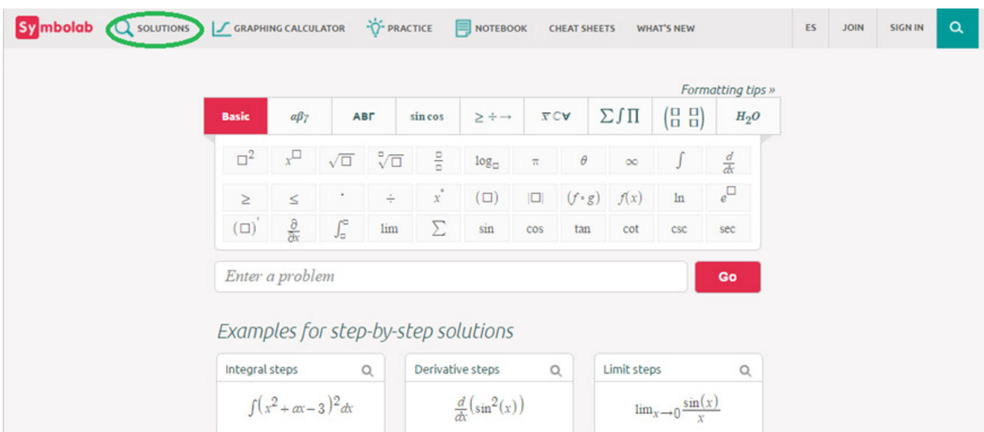
i. $\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4$

j. $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$

9.5 Matemáticas en la web

Otra de las utilidades del sitio *symbolab* es la solución de inecuaciones o desigualdades de distintas formas (lineales, cuadráticas, con valor absoluto, con radicales, logarítmicas y exponenciales). Para revisar varios ejemplos propuestos en el sitio, en la cinta superior de opciones se selecciona el módulo *Solutions* de la esquina superior izquierda que se muestra en la figura 49.

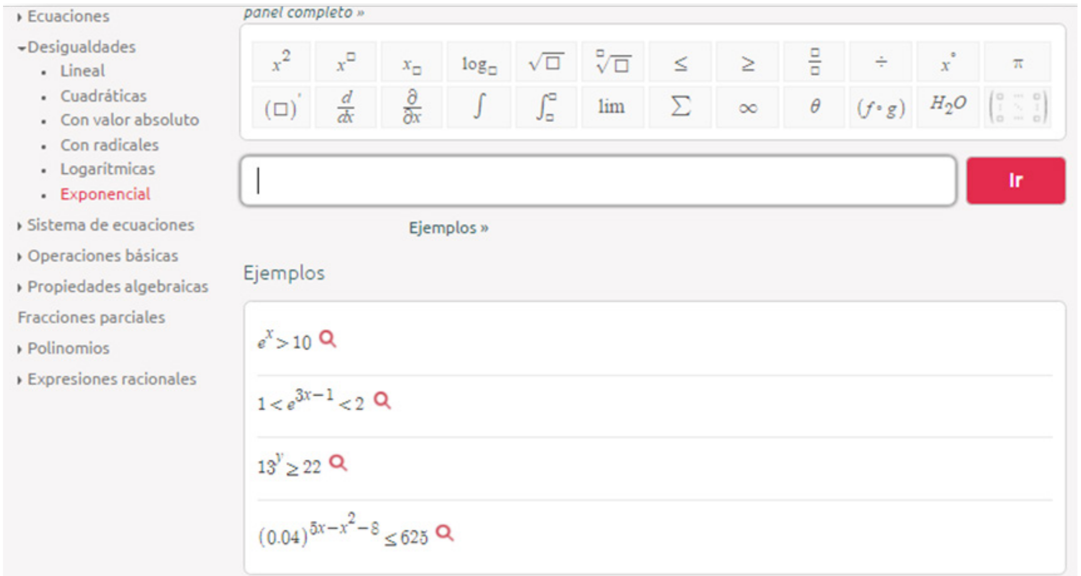
Figura 49. Opción para la solución de ecuaciones y desigualdades



Nota: tomada de www.symbolab.com

Luego en el módulo de *Álgebra* se selecciona el tema de desigualdades para revisar ejemplos resueltos de los distintos tipos de desigualdades; al dar clic en el ícono de la lupa al lado de cada ejemplo, se puede visualizar dicho ejemplo y explorar las soluciones paso a paso. En la figura 50 se visualizan algunos ejemplos de desigualdades exponenciales.

Figura 50. Opción para la revisión de ejemplos resueltos de desigualdades



Nota: tomada de www.symbolab.com

1. Solucionar en el entorno *symbolab* las siguientes inecuaciones:

a. $2x(x-1)<0$

b. $x^3+2x^2-8>0$

c. $\frac{2x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3}$

d. $\left(\sqrt[3]{x+3}\right)\left(\sqrt[4]{x-2}\right) \geq 0$

e. $x < x^2-12 \leq 4x$

f. $\frac{(x^2+4x+5)(x^4+1)}{(x^4+2x^2+2)(x^3+1)} \leq 1$

g. $\frac{(x^2-5x-14)(9x^2-24x+7)}{(x^2-x-12)(-x^2+7x-10)} \leq -1$

h. $\frac{3-\frac{x}{3}}{\frac{4}{3}} \leq \frac{3x+\frac{5}{2}}{1-\frac{4}{3}}$

i. $\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{2} > \frac{(x+3)^2}{5} - \frac{(1-2x)}{\frac{4x}{x^3-2x+6}}$

j. $\frac{(x^2+x-6)(x^2-1)}{x^3+x^2-2x} \geq 1$

10. REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN EL PLANO CARTESIANO

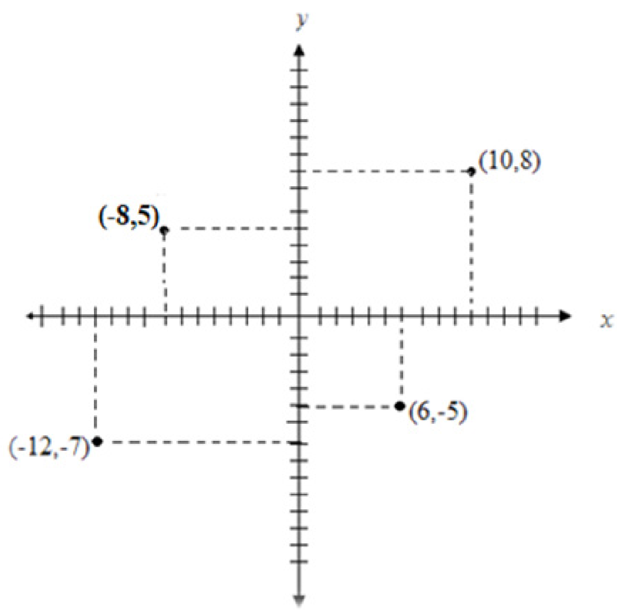
10.1 Distancia entre dos puntos
10.2 Gráfica de ecuaciones
10.3 Líneas rectas
10.4 Ecuación de la recta: Forma punto - pendiente
10.5 Ecuación de la recta: Pendiente – ordenada en el origen
10.6 Ecuaciones de la Parábola
10.7 Ecuaciones de la circunferencia
10.8 Ecuaciones de la elipse
10.9 Ecuaciones de la hipérbola
10.10 Ejercicios de práctica X
10.11 Matemáticas y TIC

10. REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Hasta el momento se han planteado ecuaciones y se han resuelto problemas haciendo uso de expresiones como las ecuaciones lineales. Sin embargo, muchas aplicaciones de la matemática van más allá de esto y buscan dar una forma gráfica a dichas expresiones y generar nuevas interpretaciones a los problemas propuestos. Una gráfica se construye utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, el cual es un esquema en donde se cruzan dos rectas perpendiculares en un punto que se denomina el origen ***O*** (Thomas y Finney, 2000)**.**

Cualquier punto del plano cartesiano se representa mediante dos coordenadas (x,y). La ubicación de este punto en el plano se hace teniendo en cuenta que la primera componente (llamada abscisa) muestra la distancia a recorrer partiendo del origen a lo largo del eje *x* y la segunda coordenada (llamada ordenada) marca la trayectoria a seguir desde el origen a lo largo del eje *y;* en el punto de cruce de estas dos trayectorias se ubica el punto dado (Thomas y Finney, 2000) (ver figura 51).

Figura 51. Representación de puntos en el plano cartesiano



Nota: elaboración propia

10.1 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se define la distancia *d* entre *P* y *Q* como

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 10.1

Encontrar la distancia entre los puntos $A(-1,3)$ y $B(4,15)$.

Solución

Identificando las coordenadas de los puntos, se aplica la fórmula de la distancia así:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(4-(-1))^2 + (15-3)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.2

La abscisa de un punto es 9 y su distancia al punto $(1,3)(1,3)$ es 10, ¿Cuál es la otra coordenada del punto?

Solución

Se tiene que:

$P(9, y_1)$; $Q(1,3)$ y $d(P,Q) = 10$.

Con esto, la distancia entre los puntos *P* y *Q* se representa así:

$$10 = \sqrt{(1-9)^2 + (3-y)^2}$$

Resolviendo esta última ecuación para despejar *y* se tiene:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 64 + (3-y)^2 \\ 100 - 64 &= (3-y)^2 \\ 36 &= (3-y)^2 \end{aligned}$$

Extrayendo raíz en ambos lados, resulta que:

$$\pm 6 = 3 - y$$

Con esto, $y = 3$ o $y = -9$, por tanto, la ordenada pedida es 6 o -9. ¿Qué representa esto gráficamente?

10.2 Gráfica de ecuaciones

La **gráfica** de una ecuación con variables *x* y *y* es el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas ***xy*** que satisfacen la ecuación dada (Lehmann, 2007).

Para hallar la gráfica de una ecuación se despeja una variable en términos de la otra (generalmente se despeja la *y* en términos de la *x*) y se asignan valores arbitrarios a una para obtener los valores correspondientes a la otra. Este proceso es comúnmente conocido como ***tabulación.***

Ejemplo 10.3

Graficar la ecuación $2x-y-3=0$.

Solución

Se despeja y en términos de *x.*

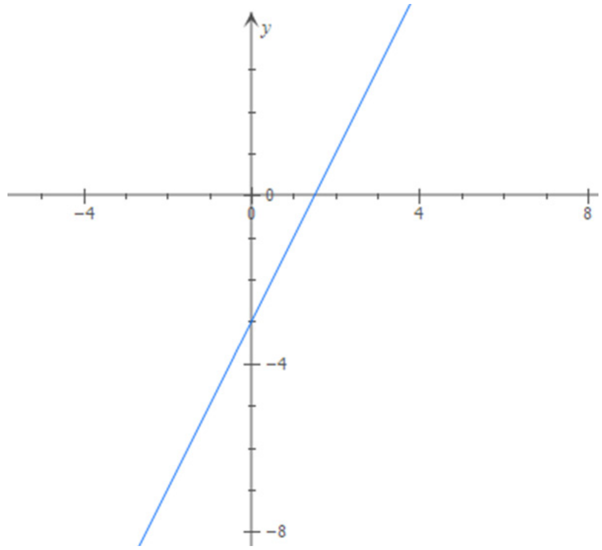
$$y=2x-3$$

Se tabula esta ecuación, dando valores arbitrarios a *x* para obtener los correspondientes valores de *y.*

X	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Representando cada una de las parejas ordenadas en el plano, la gráfica resultante es la que corresponde a la ecuación dada (ver figura 52).

Figura 52. Representación gráfica de la expresión $2x-y-3=0$



Nota: tomada de Geogebra.

Ejemplo 10.4

Graficar la ecuación $y = 5 - x^2$.

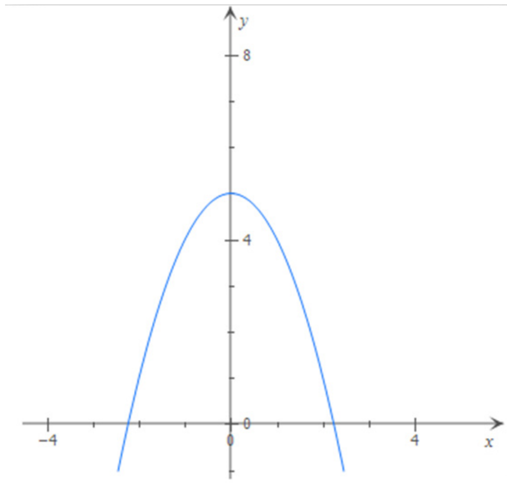
Solución

Se aplica el mismo proceso de tabulación que en el caso anterior:

x	0	± 1	± 2	± 3
y	5	4	1	-4

Graficando estos puntos y uniéndolos mediante una curva suave resulta la figura 53.

Figura 53. Representación gráfica de la expresión $y = 5 - x^2$



Nota tomada de Geogebra.

En el curso de cálculo se establecen otros criterios para la elaboración de una gráfica expresiones de este tipo en el capítulo representación gráfica de funciones.

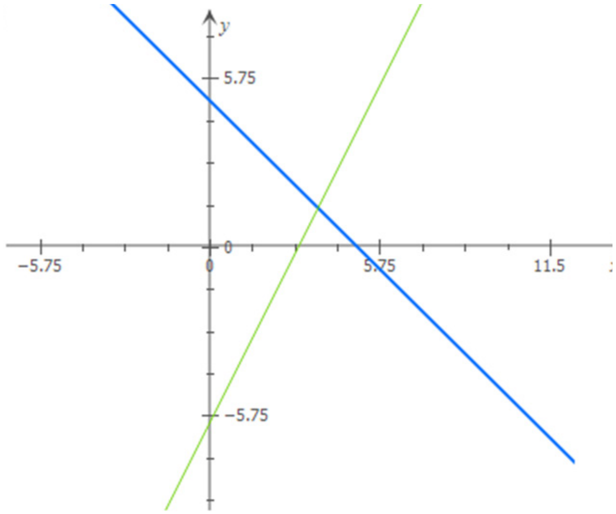
10.3 Líneas rectas

Uno de los objetos más importantes de la geometría analítica es la línea recta, además de que cuenta con innumerables aplicaciones en muchos campos del conocimiento. Una característica muy importante en el estudio de las líneas rectas es saber el grado y la naturaleza de su inclinación, este valor es conocido como *pendiente de la recta.* La **pendiente** de una línea recta se puede interpretar como la razón de la elevación y el recorrido de una recta sobre el plano ***xy***. Por lo regular, se denota con la letra *m* (Lehmann, 2007).

$$m = \frac{elevación}{recorrido} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Las distintas posiciones que puede tomar una recta en el plano dependen del valor de su pendiente. La figura 54 muestra las posibles posiciones que puede tomar una recta y la relación de esta con el valor de su pendiente, la línea azul representa una recta de pendiente negativa, la línea verde representa una recta con pendiente positiva.

Figura 54. Posiciones de una recta según su pendiente



Nota: tomada de Geogebra.

Ejemplo 10.5

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,-3)$ y $(3,7)$.

Solución

Aplicando directamente la ecuación dada, resulta que

$$m=\frac{7-(-3)}{3-1}=\frac{10}{2}=5$$

Uno de los primeros objetivos ahora, es establecer las condiciones bajo las cuales se puede obtener la ecuación de una línea recta.

10.4 Ecuación de la recta: Forma punto - pendiente

Dado un punto $P(x_1,y_1)$ por donde pasa la recta y conociendo su pendiente *m*, la ecuación que define la recta para cualquier par de valores (x,y) es (Lehmann, 2007):

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ejemplo 10.6

Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por $(5,-3)$ y tiene pendiente -2.

Solución

En este caso se tiene que $(x_1, y_1) = (5,-3)$ y $m = -2$; reemplazando en la fórmula dada, se obtiene la ecuación pedida,

$$\begin{aligned} y-(-3) &= -2(x-5) \\ y+3 &= -2x+10 \\ y &= -2x+7 \end{aligned}$$

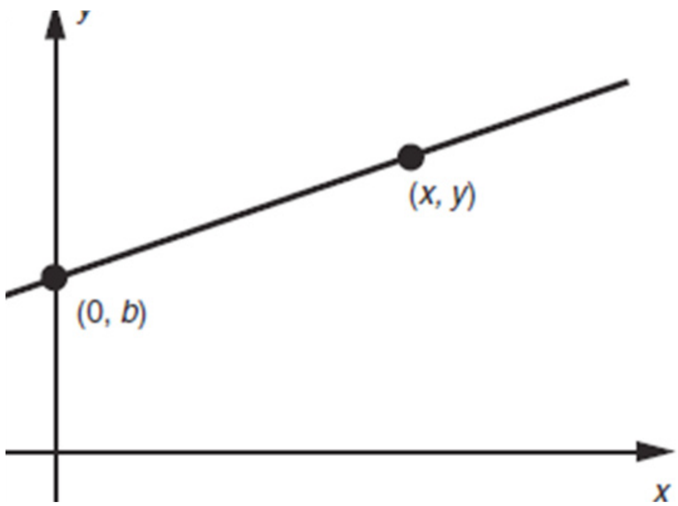
10.5 Ecuación de la recta: Pendiente – ordenada en el origen

En el caso en donde la información que se conoce es la pendiente de la recta y el punto por donde corta el eje y, la ecuación de dicha recta es (Lehmann, 2007):

$$y = mx + b$$

La figura 55 muestra estos elementos en una representación gráfica de la expresión $y = mx + b$. En este caso, el término *b* de la ecuación corresponde al valor donde la recta corta al eje de ordenadas.

Figura 55. Representación gráfica de la ecuación de la recta. Forma punto – pendiente



Nota: elaboración propia.

La tabla 8 muestra el resumen de las distintas formas de la ecuación de una línea recta.

Tabla 8

Formas para la ecuación de una línea recta

Nombre de la fórmula	Ecuación
Fórmula punto – pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Fórmula pendiente – ordenada en el origen	$y = mx + b$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$
Fórmula general	$Ax + By + C = 0$

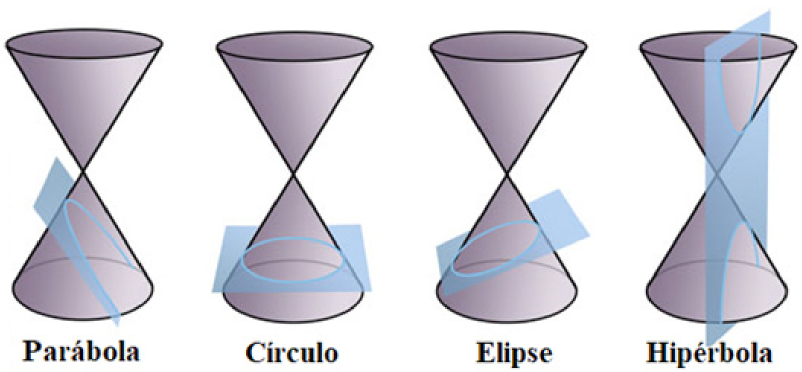
Ejemplo 10.7

Para hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la ecuación $2x + 3y = 6$ se halla la forma $y = mx + b$ de la ecuación dada, despejando *y*, de este modo, resulta que $y = -\frac{2}{3}x + 2$ con lo que $m = -\frac{2}{3}$ y $b = 2$.

10.6 Ecuaciones de la Parábola

Unas de las figuras más comúnmente estudiadas en geometría analítica son las secciones cónicas, estas son los lugares geométricos que se obtienen al cortar con un plano dos conos circulares rectos opuestos por el vértice (Thomas y Finney, 2000) (ver figura 56).

Figura 56. Secciones cónicas



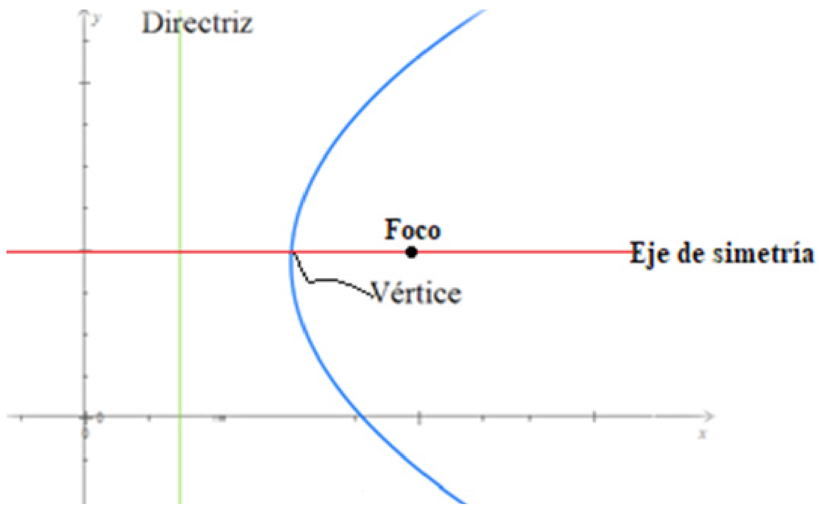
Cada una de estas secciones son estudiadas en términos de los puntos que permiten su construcción en un plano de coordenadas cartesianas y de su correspondiente expresión analítica.

En primera medida, se tiene que una parábola es el conjunto de todos los puntos en el plano de coordenadas *xy* que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco). Como se observa en la figura 57 las ramas de la parábola son simétricas respecto a un punto conocido como vértice, el cual es un punto medio entre la recta directriz y el foco y está ubicado sobre una línea recta paralela a los ejes coordenados llamada eje de simetría (Thomas y Finney, 2000).

Lo que se hace en geometría analítica es hallar una ecuación que represente el lugar geométrico en cuestión y a partir de la cual se puedan hallar todos y cada uno de los puntos que forman parte de dicha curva. Por otro lado, también se busca cómo a partir de la ecuación dada, se puede hallar la representación gemétrica correspondiente a dicho lugar gemético (Lehmann, 2007).

Para el caso particular de la parábola, dependiendo de la forma que tiene su ecuación, se tienen parábolas cuyas ramas abren hacia la derecha o hacia la izquierda, pero tambien parabolas cuyas ramas abren hacia arriba o hacia abajo. Además, estas parábolas pueden tener su vértice sobre los ejes coordenados o sobre ejes de simetría paralelos a estos. La figura 57 muestra una parábola que abre hacia la derecha y cuyo eje de simetría es paralelo al eje *x*.

Figura 57. Elementos básicos de una parábola



Nota: tomada de Geogebra.

Las diferentes formas en la ecuación de una parábola se resumen en la tabla 9.

Tabla 9

Formas para la ecuación de una parábola

Ecuación	Foco	Ecuación de la directriz	Descripción
$y^2 = \pm 4px$	$F(p,0)$	$x = -p$	Vértice en el origen y ramas sobre el eje x
$x^2 = \pm 4py$	$F(0,p)$	$y = -p$	Vértice en el origen y ramas sobre el eje *y*
$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$	$F(h+p,k)$	$x = h-p$	Vértice en (h,k) y ramas sobre el eje *x*
$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$	$F(h,k+p)$	$y = k-p$	Vértice en (h,k) y ramas sobre el eje *y*
$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$	Se completa cuadrados para llevar a las formas estándar.		Ecuación general de la parábola sobre el eje *y*
$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$			Ecuación general de la parábola sobre el eje *x*

Ejemplo 10.8

Una parábola tiene vértice en el punto $V(-4,2)$ y directriz en la recta $y = 5$. Expresar esta ecuación en la forma general.

Solución

Como la ecuación de la recta directriz es paralela al eje *x*, se tiene que la parábola abre sobre el eje *y*, por tanto, se utiliza la ecuación $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$ con $h = -4; k = 2$ Para determinar el valor de *p* se puede utilizar la expresión $y = k - p$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= k - p \\ 5 &= 2 - p \\ p &= -3 \end{aligned}$$

Y con esto, se puede hallar la ecuación pedida:

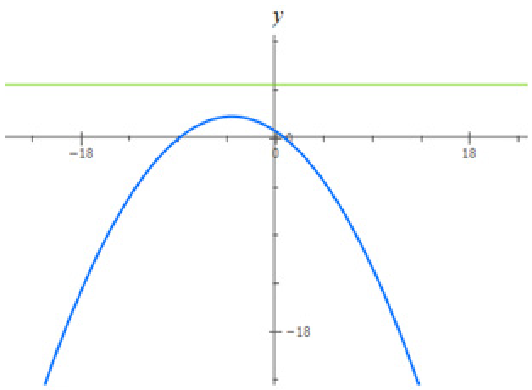
$$\begin{aligned} (x-h)^2 &= \pm 4p(y-k) \\ (x-(-4))^2 &= 4(-3)(y-2) \\ (x+4)^2 &= -12(y-2) \end{aligned}$$

Esta última ecuación sería la ecuación estándar de la parábola con vértice en $V(-4,2)$ y foco en $F(h,k+p)=F(-4,-1)$. Para dar la forma general de esta parábola, se desarrolla el cuadrado del binomio y se simplifica la expresión resultante:

$$(x+4)^2=-12(y-2)$$
$$x^2+8x+16=-12y+24$$
$$x^2+8x+12y-8=0$$

La grafica de esta ecuación se muestra en la Figura 58.

Figura 58. Representación gráfica del ejemplo 10.8



Nota: tomada de www.symbolab.com .

Ejemplo 10.9

Dada la ecuación $y^2+14y+4x+45=0$ determine los elementos de esta parábola y bosqueje su gráfica.

Solución

Como se nota en la ecuación la variable cuadrática es *y* por tanto, esta ecuación corresponde a una parábola sobre el eje *x*.

Para llevar a la forma estándar, se completa cuadrados sobre la variable *y* así:

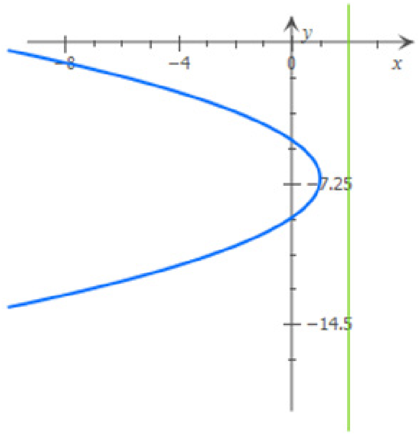
$$y^2+14y+4x+45=0$$
$$y^2+14y+49=-4x-45+49$$
$$(y+7)^2=-4x+4$$
$$(y+7)^2=-4(x-1)$$

Comparando esta última expresión con la fórmula $(y-k)^2=\pm 4p(x-h)$ se tiene que $k=-7; h=1; p=-1$ con lo que los elementos de la parábola son:

- Vértice: $V(h,k) = V(1,-7)$
- Foco: $F(h+p,k) = F(0,-7)$
- Directriz: $x = h - p = 2$

La representación gráfica se muestra en la figura 59.

Figura 59. Representación gráfica de la expresión $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

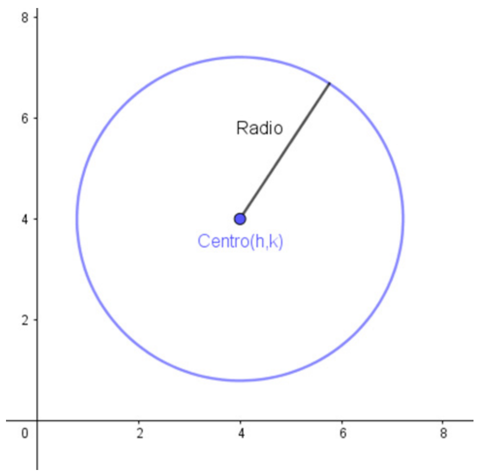


Nota: tomada de Geogebra.

10.7 Ecuaciones de la circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico del plano conformado por todos los puntos que están a igual distancia de un punto fijo llamado centro; el ***círculo*** es la superficie limitada por una circunferencia (Lehmann, 2007) (ver figura 60).

Figura 60. Circunferencia con centro en (h,k) y radio r



Nota: tomada de Geogebra.

La circunferencia tiene las siguientes ecuaciones (ver tabla 10):

Tabla 10

Formas para la ecuación de una circunferencia

Ecuación	Descripción
$x^2 + y^2 = r^2$	Centro en el origen y radio *r*.
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Centro el punto (h,k) y radio *r*.
$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + C = 0$	Ecuación general de la circunferencia.

Ejemplo 10.10

Determine radio y centro de las siguientes circunferencias. Trazar sus graficas:

a. $(x-3)^2 + y^2 = 5$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

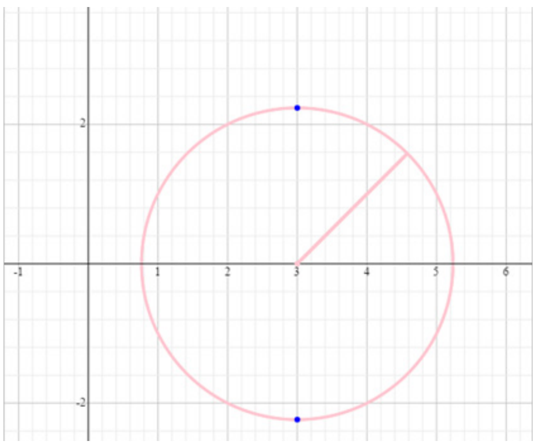
c. $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

Solución

a. Al comparar la ecuación $(x-3)^2 + y^2 = 5$ con la forma estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ se observa que la ecuación dada corresponde a una circunferencia con centro en $C(3,0)$ y radio $r = \sqrt{5}$.

La grafica de esta función se muestra en la figura 61.

Figura 61. Representación gráfica de la expresión $(x-3)^2 + y^2 = 5$



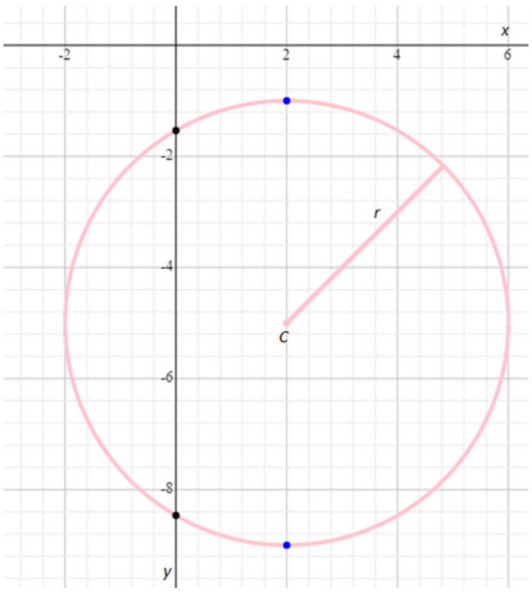
Nota: tomada de Geogebra.

b. Para poder establecer centro y radio, se completa al cuadrado tanto para la variable x como para la variable y.

$$x^2+y^2-4x+10y+13=0$$
$$x^2-4x+4+y^2+10y+25=-13+4+25$$
$$(x-2)^2+(y+5)^2=16$$

Comparando la última expresión $(x-2)^2+(y+5)^2=16$ con la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ se nota que el centro de la circunferencia es $C(2,-5)$ y $r=4$. La representación gráfica se muestra en la Figura 62.

Figura 62. Representación gráfica de la expresión $x^2+y^2-4x+10y+13=0$



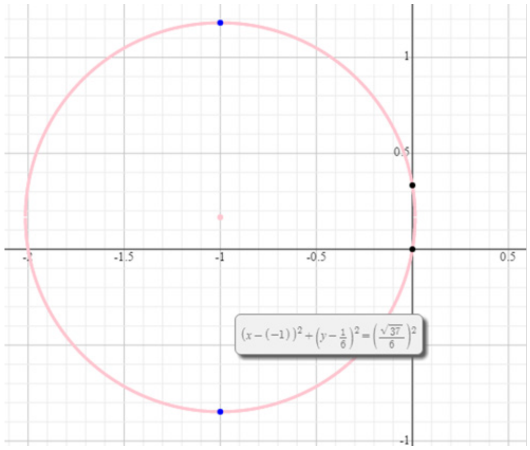
Nota: tomada de Geogebra.

c. Aplicando el mismo procedimiento de completación al cuadrado, se tiene:

$$3x^2+3y^2+6x-y=0$$
$$x^2+2x+1+y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{36}=1+\frac{1}{36}$$
$$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{37}{36}$$

Con base en esto, la circunferencia tiene centro en $C\left(-1,\frac{1}{6}\right)$ y su radio es $r=\frac{\sqrt{37}}{6}$ La grafica correspondiente se muestra en la figura 63.

Figura 63. Representación gráfica de la expresión $3x^2+3y^2+6x-y=0$



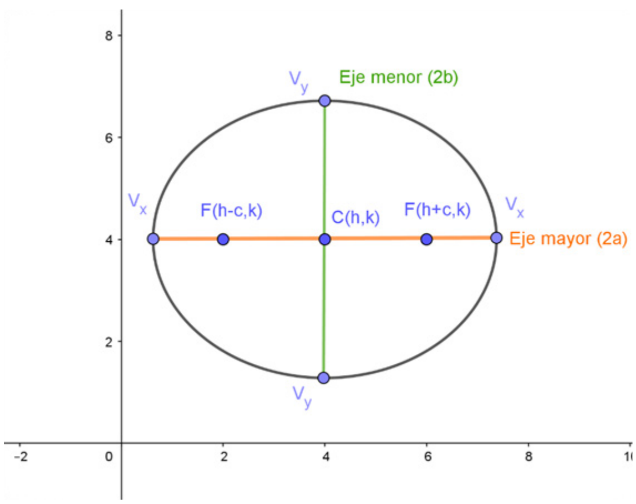
Nota: tomada de Geogebra.

10.8 Ecuaciones de la elipse

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante (Arya y Lardner, 2009).

La línea donde se ubican los focos de la elipse se llama *eje mayor.* Si este es paralelo al eje *x* la elipse es "achatada" en la dirección del eje horizontal (figura 64), si por el contrario el eje mayor es paralelo al eje *y*, la elipse es "achatada" en la dirección del eje vertical. La longitud del eje principal es *2a.* El eje perpendicular al eje principal se denomina *eje menor* y es de longitud *2b.*

Figura 64. Forma gráfica de una elipse con centro en (h,k)



Nota: tomada de Geogebra.

Las distintas formas de la ecuación de una elipse se muestran en la siguiente tabla 11.

Tabla 11

Formas para la ecuación de una elipse

Ecuación	Centro, Vértices y Focos.	Descripción
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0,0);F(\pm c,0)$ $V_x(\pm a,0);V_y(0,\pm b)$	Centro en el origen eje mayor sobre el eje *x*
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$C(0,0);F(0,\pm c)$ $V_x(\pm b,0);V_y(0,\pm a)$	Centro en el origen eje mayor sobre el eje *y*
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$F(h\pm c,k)$ $V_x(h\pm a,k);V_y(h,k\pm b)$	Centro en (h,k) eje mayor sobre el eje *x*
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$F(h,k\pm c)$ $V_x(h\pm b,k);V_y(h,k\pm a)$	Centro en (h,k) eje mayor sobre el eje *y*
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Se completa cuadrados para llevar a las formas estándar.	Ecuación general de la elipse. Si $A<B$ la elipse es horizontal, en caso contrario es vertical

Siempre se cumple que $a^2=b^2+c^2$ y que $a>b$.

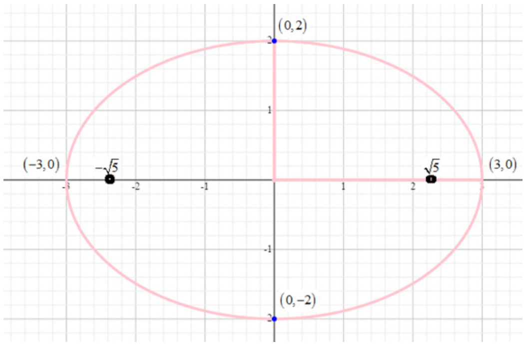
Ejemplo 10.11

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ hallar las coordenadas de los vértices, focos y la longitud de los ejes.

Solución

Comparando la ecuación dada con la expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se observa que $a=3;b=2$. Puesto que a se encuentra acompañando a la variable *x*, se puede decir que la elipse tiene como eje mayor al eje *x*. la longitud del eje mayor es $2a=2(3)=6$; la longitud del eje menor es $2b=2(2)=4$. Las coordenadas de los vértices sobre el eje *x* son $V_x(\pm a,0)=V_x(\pm 3,0)$; las coordenadas de los vértices sobre el eje *y* son $V_y(0,\pm b)=V_y(0,\pm 2)$. Para hallar las coordenadas de los focos se requiere el valor c y puesto que $a^2=b^2+c^2$, se tiene que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, por tanto, las coordenadas de los focos son $F(\pm c,0)=F(\pm\sqrt{5},0)$. La representación gráfica se da en la figura 65.

Figura 65. Representación gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$



Nota: tomada de Geogebra.

Ejemplo 10.12

A partir de la ecuación $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$ determinar centro, vértices, focos y gráfica de la elipse correspondiente.

Solución

Completando cuadrados para las variables *x* e *y* se tiene lo siguiente:

$$4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$$
$$4x^2-48x+9y^2+72y+144=0$$
$$4\left(x^2-12x\right)+9\left(y^2+8y\right)+144=0$$
$$4\left(x^2-12x+36\right)+9\left(y^2+8y+16\right)=-144+144+144$$
$$4\left(x-6\right)^2+9\left(y+4\right)^2=144$$
$$\frac{4\left(x-6\right)^2}{144}+\frac{9\left(y+4\right)^2}{144}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{\left(x-6\right)^2}{36}+\frac{\left(y+4\right)^2}{16}=1$$

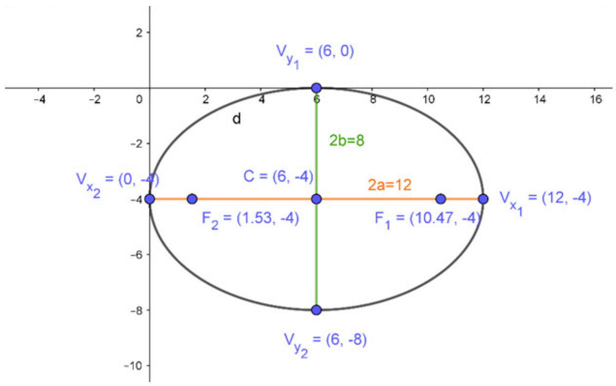
Puesto que el mayor valor de los denominadores se encuentra sobre la variable *x*, esta ecuación corresponde a una elipse con centro en (h,k) eje principal sobre el eje *x*. En este caso se tiene que $a=6; b=4; h=6; k=-4$ y $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}$.

Con esto, se tiene lo siguiente:

- La longitud del eje mayor es $2a=2(6)=12$.
- Centro de la elipse: $C(h,k)=C(6,-4)$
- Longitud del eje menor: $2b=2(4)=8$
- Coordenadas de los vértices sobre el eje *x*: $V_x(h\pm a,k)=V_x(6\pm 6,-4)$. $V_x(0,-4)$ y $V_x(12,-4)$

- Coordenadas de los vértices sobre el eje *y* son $V_y\left(h,k\pm b\right)=V_y\left(6,-4\pm 4\right)$. $V_y\left(6,0\right)$ y $V_y\left(6,-8\right)$
- Las coordenadas de los focos son $F\left(h\pm c,k\right)=F\left(6\pm\sqrt{20},-4\right)$.
- La representación gráfica se da en la figura 66.

Figura 66. Representación gráfica de la expresión $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$



Nota: tomada de Geogebra.

10.9 Ecuaciones de la hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante (Arya y Lardner, 2009).

La Figura 67 muestra los elementos básicos de una hipérbola:

- Las rectas $y=-\frac{b}{a}x$ y $y=\frac{b}{a}x$ son conocidas como ***asíntotas de la hipérbola*** y entre ellas se ubican las ramas de esta.
- Siempre se cumple que $a>b$.
- Si la variable *y* tiene el signo negativo, la hipérbola tiene sus ramas sobre el eje x, en caso contrario, se trata de una hipérbole que abre sobre el eje y.
- Si el centro de la hipérbola es distinto del punto $(0,0)$ las expresiones que permiten hallar las coordenadas de los vértices y los focos son las mismas que se emplearon para el caso de la elipse.
- El eje principal de la hipérbola es la recta que contiene a los focos y a los vértices y puede ser una recta paralela al eje *x* o una recta paralela al eje *y*.

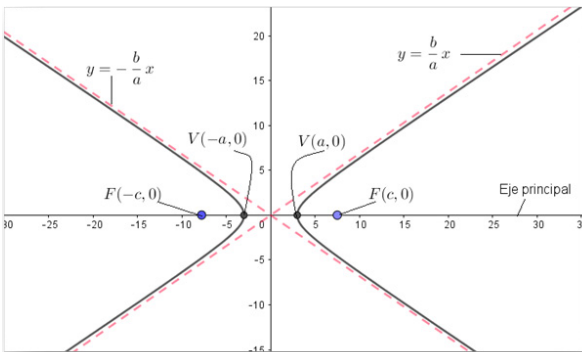
Las ecuaciones para la hipérbola son:

Tabla 12

Formas para la ecuación de una hipérbola

Ecuación	Centro, Vértices y Focos.	Descripción
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0,0)$ $F(\pm c,0)$ $V(\pm a,0)$	Centro en el origen eje principal sobre el eje *x*
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$C(0,0)$ $F(0,\pm c)$ $V(0,\pm a)$	Centro en el origen eje principal sobre sobre el eje *y*
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h,k)$ $F(h\pm c,k)$ $V(h\pm a,k)$	Centro en (h,k) eje principal sobre el eje *x*
$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$	$C(h,k)$ $F(h,k\pm c)$ $V(h,k\pm a)$	Centro en (h,k) eje principal sobre el eje *y*
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Se completa cuadrados para llevar a las formas estándar.	Ecuación general de la hipérbola. Los valores *A* y *B* deben ser de signos opuestos

Figura 67. Elementos básicos de una hipérbola



Nota: tomada de Geogebra.

Al igual que para el caso de la elipse, en este caso se cumple que $a^2=b^2+c^2$.

Ejemplo 10.13

Hallar los vértices, focos, asíntotas y la representación gráfica de la hipérbola $x^2-4y^2-4x+24y-36=0$

Solución

Completando cuadrados para cada una de las variables *x* e *y*, se tiene:

$$x^2-4y^2-4x+24y-36=0$$
$$x^2-4x-4y^2+24y=36$$
$$x^2-4x+4-4\left(y^2-6y+9\right)=36+4-36$$
$$(x-2)^2-4(y-3)^2=4$$
$$\frac{(x-2)^2}{4}-(y-3)^2=4$$

En este caso, se tiene que $a=2; b=1; h=2; k=3$ y $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

Con esto,

- Vértices: $V(4,3); V(0,3)$
- Focos: $F\left(2+\sqrt{3},3\right); F\left(2-\sqrt{3},3\right)$
- Asíntotas: $y=\pm\frac{1}{2}(x-2)+3$

RECURSOS DE INTERNET

Para aprender geometría analítica existe gran variedad de recursos en línea que son de gran ayuda para afianzar los conceptos de este tema. En el siguiente enlace se proporcionan una serie de recursos que permiten trabajar distintos temas de geometría y hacer distintas construcciones.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/vectores.htm

10.10 Ejercicios de práctica X

1. Determine las pendientes de las líneas que unen cada par de puntos dado:
   a. $(2,-1)$ y $(-5,-7)$.
   b. $(2,1)$ y $(5,7)$
   c. $(-3,-2)$ y $(3,2)$
   d. $(5,-2)$ y $(5,-6)$
   e. $(3,5)$ y $(-1,5)$
   f. $(1,2)$ y $(1,5)$

2. Determine la ecuación de las líneas rectas bajo las condiciones que se dan en cada caso. Dibuje la gráfica respectiva.
   a. Pasa por el punto (-2, -1) y tiene pendiente 1.
   b. Pasa por $(1,1)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.
   c. Pasa por el origen y tiene pendiente cero.
   d. Pasa por $(-2,-3)$ y $m=-1$
   e. Contiene los puntos $(3,1)$ y $(-4,5)$.
   f. Une los puntos $(2,0)$ y $(3,5)$.
   g. Pasa a través de los puntos $(1,-1)$ y $(-1,1)$
   h. $m=-2$ y $P(x,5)$.
   i. $m=\frac{1}{3}$ y $P(5,\mathrm{y})$
   j. $m=2$ y corta la recta $2x-3y=1$ en $P(0,3)$

3. Hallar la pendiente de cada una de las relaciones lineales siguientes.

    a. $3x+2y=6$

    b. $4x-5y=10$

    c. $y+2x-3=0$

    d. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

    e. $2y-3=0$

    f. $3x+4=0$

4. En cada caso se da un punto por donde pasa una recta y su relación contra recta, hallar la ecuación de dicha recta y dibujarla.

    a. Pasa por $(2,1)$ y es paralela a la recta $x+y=0$

    b. Pasa por $(1,0)$ y es paralela a la recta $x - y + 1 = 0$

    c. Pasa por $(0,1)$ y es paralela a la recta $x + y = 0$

    d. Pasa por $(-1,-2)$ y es perpendicular a la recta $-2x + 3y = -4$

    e. Pasa por (-3, 3) y es perpendicular a la recta $y = 2$

    f. Pasa por $(-2,0)$ y es paralela a la recta $3x - 2 = 0$

    g. Pasa por $(0,1)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-2,-2)$ y $(-3,3)$.

5. Hallar las coordenadas del vértice, foco y la ecuación de la directriz para las parábolas.

    a. $y^2=2x$ b. $y^2=-2x$ c. $x^2=2y$

6. Hallar la ecuación de la parábola bajo las condiciones dadas en cada caso:

    a. Vértice en el origen y focos en $(\pm3,0)$.

    b. Vértice en el origen y $c=5$.

    c. Vértice en el origen y con directriz $x=4$

d. Vértice en el origen, ramas sobre el eje *x* y que pasa por el punto $(-1,1)$.

e. Vértice en $(-2,1)$ y directriz $y=1$.

7. Hallar el vértice, foco y ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

a. $3x^2+2x+5y-6=0$

b. $x^2+6x+5y+39=0$

c. $9y^2-30y-4x+49=0$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia bajo las condiciones establecidas:

a. Centro en el origen y radio 5.

b. Centro en $(-1,2)$ y radio 10.

c. Centro en $(-1,-1)$ y que pase por $(1,1)$

d. Centro en $(2,3)$ y que pase por el origen.

e. Pasa por los puntos $(1,1);(1,-1);(-1,1)$.

9. De las siguientes expresiones, determine cuales corresponden a ecuaciones de una circunferencia. A las que corresponda, determinar centro, radio y elaborar su gráfica:

a. $2x^2+4y^2-4x-2y+1=0$

b. $x^2+y^2-6x-4y+13=0$

c. $x^2+y^2-x=0$

d. $x^2+y^2-y=0$

e. $x^2+y^2-2x+8y+26=0$

f. $x^2+y^2-2x-4y+2=0$

g. $x^2+y^2-2x-4y+10=0$

10. Hallar la ecuación de la elipse que cumple las condiciones dadas en cada caso:

a. Vértices en $(\pm 8,0)$; focos $(\pm 5,0)$.

b. Vértices en $(0,\pm 5)$; focos en $(0,\pm 1)$.

c. Vértices en $(0,\pm 3)$ y longitud de eje menor 3.

d. Focos en $(\pm 1,0)$ longitud de eje mayor 6.

11. Dadas las siguientes ecuaciones determinar las coordenadas de los vértices, focos, longitudes de los ejes y dar una gráfica.

a. $\frac{(x-1)^2}{49}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$

b. $16x^2+9y^2+64x-18y-71=0$

c. $4x^2-9y^2-48x-72y+108=0$

d. $12x^2-24y^2-72x-144y-120=0$

e. $400x^2-441y^2-1200x+294y+851=4900$

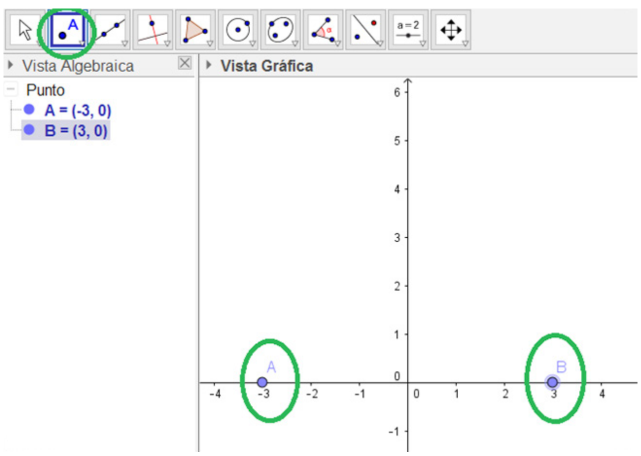
10.11 Matemáticas y TIC

Como se dijo anteriormente, *Geogebra* es un programa diseñado particularmente para hacer trabajo con geometría dinámica en donde es especialmente útil y versátil para la construcción de entornos geométricos.

Desde la barra de herramientas se pueden hacer construcciones que van desde el trazo de puntos hasta el trazo de circunferencias, elipses y otras construcciones de forma dinámica. A continuación se presenta el conjunto de instrucciones para hacer la construcción dinámica de la elipse.

Se va a construir una elipse con focos fijos en $(-3,0)$ y $(3,0)$. Para visualizar los distintos modos de la ecuación se contará con un punto predefinido *C*. Para ubicar estos focos se utiliza la herramienta punto de la barra de herramientas y luego en la ventana grafica se da clic en las coordenadas que se establecieron para los focos. Los círculos verdes en la figura 68 se muestran las herramientas para este proceso.

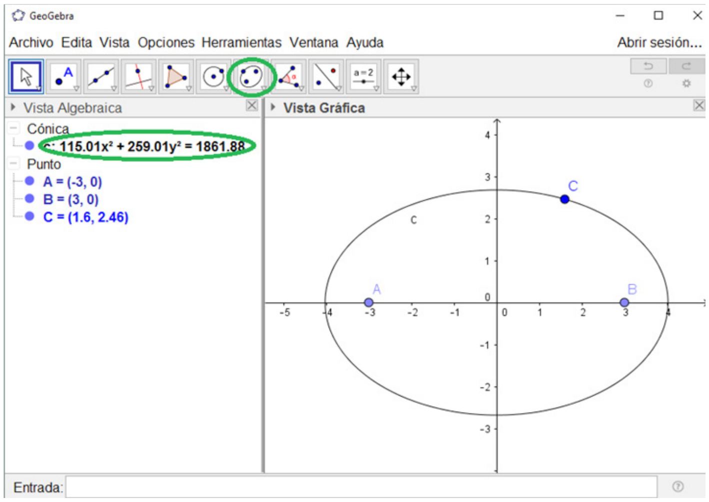
Figura 68. Ubicación de focos para la construcción de una elipse



Nota: tomada del programa Geogebra

A continuación, de la barra de herramientas, se selecciona el botón elipse y luego se da clic en los puntos A y B que se determinaron para los focos; luego se da clic en cualquier área del gráfico para que se muestre la elipse. En la vista algebraica se muestra la ecuación de la elipse generada, se agrega además un punto sobre dicha elipse el cual al mover muestra distintos tamaños de esta y las distintas ecuaciones en el panel de vista algebraica.

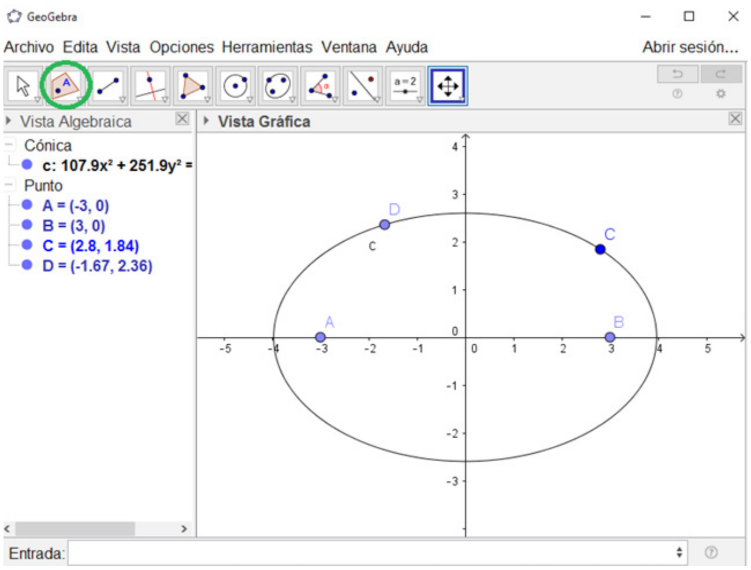
Figura 69. Construcción de la elipse y visualización de la ecuación respectiva



Nota: tomada del programa Geogebra

A continuación se va a ubicar otro punto fijo sobre una elipse que solo se mueva en el trazo de la elipse. Para ello se selecciona la herramienta punto y del menú desplegable se selecciona la opción *punto en objeto.* Luego, se da clic sobre cualquier punto en la línea que delimita la elipse. Este punto se etiquetará automáticamente como *D* (ver figura 70).

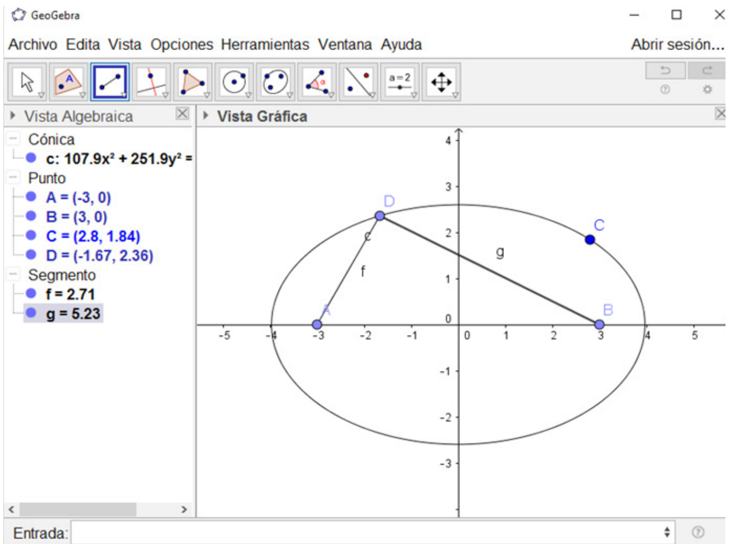
Figura 70. Ubicación de punto flotante sobre la elipse



Nota: tomada del programa Geogebra

Se trazan ahora los segmentos que unen los dos focos con el punto D. Para ello, de la barra de herramientas se selecciona la opción *recta* y en el menú desplegable se selecciona la opción *segmento*. Luego, se da clic en el punto A, luego en D, después en B y finalmente nuevamente en D. El resultado obtenido es el que se muestra en la figura 71. Se debe notar que al mover el punto D, no cambia la forma de la forma de la elipse y se mueve solamente sobre la línea de esta.

Figura 71. Construcción de elipse. Distancias de los focos a la elipse

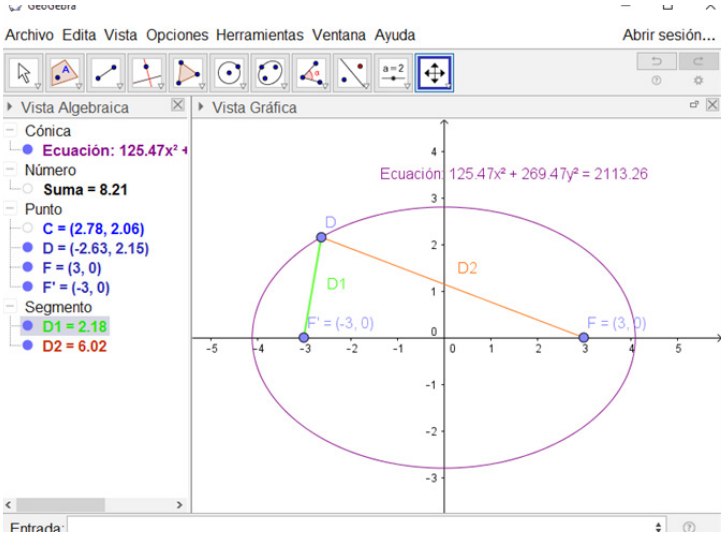


Nota: tomada del programa Geogebra

Por definición la elipse es el conjunto de puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre la misma. Para verificar esta definición en el objeto que se acabó de construir, se define la variable *suma[<Lista>]* desde la entrada de comandos en la parte inferior de *Geogebra* y entre llaves, se escriben los caracteres *f* y *g* que son los que definen las distancias de los focos al punto *D* respectivamente, esto queda así *suma[{f,g}]*. Al presionar la tecla *enter* aparece un resultado en la vista algebraica que representa la suma de las distancias *f* y *g*. Al elegir el punto *D* y moverlo por toda la elipse, este valor permanece igual, corroborando la definición con el objeto construido.

Todos estos elementos se pueden personalizar por color, nombre, etc. dando clic derecho sobre cualquiera de los elementos de la vista algebraica y seleccionando la opción *propiedades*, mostrando un resultado como en la figura 72.

Figura 72. Construcción gráfica de la elipse



Nota: tomada del programa Geogebra

Utilizando las herramientas para la construcción de cónicas:

a. Construir la parábola y corroborar que se cumple la definición dada para este lugar geométrico.

b. Construir la hipérbola y comprobar que se cumple la definición de hipérbola dada en la sección 10.9.

c. Desde el panel de entrada de expresiones ingresar expresiones de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ explorando la relación que tienen cada uno de los coeficientes A, B, C, D y E con las distintas formas cónicas estudiadas en el capítulo 10. Establecer las condiciones que deben tener cada uno de estos coeficientes para obtener las distintas formas de las ecuaciones de las figuras cónicas.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Acevedo F., B., Ospina A., O. E., y Salazar S., L. (2009). *Matemáticas fundamentales para Ingeniería*. Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Arya, J. y Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson Educación.

Baldor, A. (1974). *Aritmética teórico práctica*. Guatemala: Cultural Centroamericana.

Barwise, J. (1977). *Handbook of mathematical logic*. Amsterdam, Países Bajos.

Beceriil, F. y Reyes V., J. (2012). *Pre cálculo*. México: Trillas.

Beyer K., W. O. (julio-septiembre, 2001). Algunos aspectos epistemológicos de da matemática: ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere, 5*(14), 236-240.

Courant, R. y Robins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid, España: Aguilar Ediciones.

Geogebra. (Octubre de 2016). *Geogebra*. Recuperado de https://www.geogebra.org

Haeussler, E., y Richard, P. (2003). *Matemáticas para Administración y Economía*. Pearson Educación.

Hostetler, R. (1985). *Precalculus*. Massachusett: Heath and Company Lexington.

Lehmann, C. (2007). *Geometría analítica*. México: Limusa.

Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Mejía, F., Álvarez, R., y Fernández, H. (2005). *Matemáticas previas al cálculo*. Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

Microsoft. (Octubre de 2016). *Offcial Microsoft Dowloand Center*. Recuperado de https://www.microsoft.com/es-es/download/details.aspx?id=15702

Miller, H. y Hornsby, J. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. Pearson Addison Wesley.

MNU. (2016). Instititutо para la enseñanza de las ciencias naturales. Múnich, Alemania Recuperado de http://www.mnu.de/auszeichnungen#mathematik

Pinter, C. C. (2014). *A book of set theory*. Massachusetts: Addison–Wesley.

Rey P., J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática* (Vol. 2). Barcelona, España: Cedisa.

Stewart J., R., & L., W. S. (2005). *PreCálculo*: Matemáticas para el Cálculo. Reverté.

Swokowski, E. (2004). *Cálculo con Geometría Analítica* (Quinta ed.). Editorial Iberoamericana.

Swokowski, E. (2005). *Algebra y trigonometría* (4ª ed.). México: Editorial Iberoamericana.

Symbolab. (Octubre de 2016). *Symbolab*. Recuperado de https://www.symbolab.com/

Thomas, G. y Finney, R. (2000). *Cálculo con geometría analítica*. México: Addison-Wesley.

Winsniewski, P. M. y Gutiérrez Banegas, A. L. (2003). *Introducción a las matemáticas universitarias*. México: McGraw-Hill.

WolframAlpha. (Octubre de 2016). Recuperado de http://www.wolframalpha.com/

Otros recursos de internet

www.thatquiz.org/

Espacio interactivo con test sobre cuestiones variadas de matemáticas.

www.bbc.uk/education/mathsfile/shockwawe/games/animal.html

Juego interactivo para trabajar unidades de peso.

www.seccioneuropeamatesribera.blogspot.com/210/08/casey-runner-adding-integers.html

Juego interactivo en flash para trabajar los números enteros.

https://www.ematematicas.net/

Ejercicios de matemáticas de diferentes temáticas.

https://magiaymatematicas.blogspot.com.co/p/presentacion.html

Todo sobre la magia y las matemáticas. Cartomagia, Enlaces y material didáctico.

https://www.intermatia.com/quienes_somos.php
Ejercicios interactivos de matemáticas.

http://www.genmagic.net/repositorio/thumbnails.php?album=14
Banco de objetos multimedia interactivos.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/vectores.htm
Prácticas interactivas de geometría analítica.

www.bbc.co.uk/education/mathsfile/shockwawe/game/datapikc.html
Juego interactivo para trabajar con números.

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.divpad
Juego para descargar y aprender a dividir naturales.

https://play.google.com/store/apps/details?id=ikox.joaquin
Ejercicio para cálculo mental.

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.solirify.mathgame
Permite trabajar las sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, tablas de multiplicar y cálculo de porcentajes.

http://www.freedigitalphotos.net/
Banco de imágenes para este texto.

http://sauce.pntic.mec.es/jdiego/
Recursos de aprendizaje de aritmética básica.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/index.html
Sitio web con aplicaciones desarrolladas por el comité de matemáticas de Andalucía.

https://es.symbolab.com/solver
Calculadora online para resolver ejercicios paso a paso de diversos temas de matemáticas básicas.

APÉNDICES

APÉNDICE I: DESCARGA E INSTALACIÓN DE GEOGEBRA

Geogebra es un programa de muy fácil descarga e instalación. Para su funcionamiento es necesario tener instalado y actualizado el entorno Java de nuestro equipo ya que la base de su diseño está en este entorno. Para descargar el archivo ejecutable de *Geogebra* y el de Java, se pueden seguir los siguientes enlaces:

Enlace a GeoGebra: http://www.geogebra.org/cms/

Enlace a Java: http://www.java.com/es/download/manual.jsp

Una de las ventajas de *GeoGebra* es que es un software multiplataforma, lo que quiere decir que es compatible con cualquier sistema operativo Windows, Linux o Mac. Incluso, recientemente se han desarrollado algunas herramientas para utilizar este programa en los teléfonos inteligentes y Tablet con sistema operativo Android.

Otra opción de trabajo con el programa, es tener en un dispositivo USB la versión portable, la cual permite trabajar en cualquier equipo sin necesidad de realizar ningún tipo de instalación, solamente ejecutando el archivo desde una memoria externa.

Finalmente, el software ofrece la opción de trabajar sin necesidad de descargar e instalar programas mediante el applet web. Para ello es necesario disponer de conexión a Internet. En el mismo navegador web se podrá trabajar con GeoGebra (recomendamos utilizar el navegador web libre Mozilla Firefox). Este método no es el más indicado para trabajar cotidianamente con GeoGebra porque su carga es lenta y no es garantizado su acceso.

Enlace a applet GeoGebra: http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html

Para instalar este programa se siguen los siguientes pasos de acuerdo con el sistema operativo correspondiente:

1. En Windows se hace doble clic en el ejecutable (.exe) que se puede descargar del sitio oficial.

De ahí en adelante la instalación se hace de manera inmediata siguiendo los pasos de instalación que el mismo programa ofrece. Si en algún momento el programa indica que no tenemos instalada la versión de Java correspondiente, deberemos instalarla desde Java/Windows.

2. En Linux, en especial para la distribución Ubuntu, existen repositorios desde los que se puede instalar GeoGebra, lo cual será viable si se dispone de una conexión a Internet. Esta opción es la más recomendable, ya que GeoGebra se actualizará periódicamente a la última versión estable.

APÉNDICE II: DESCARGA E INSTALACION DE MICROSOFT MATHEMATICS 4.0

Este software es únicamente compatible con el sistema operativo Windows y está disponible para las versiones de Windows 10 y previas hasta Windows server (2003). Como requisito del sistema es necesario tener instalado en el equipo el entorno .NET Framework. Para descargarlo y actualizarlo, se puede hacer a través del siguiente enlace:

Net Framework: http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?displaylang=esyFamilyID=ab99342f-5d1a-413d-8319-81da479ab0d7

Para la instalación del paquete en el sistema operativo Windows 10 en la versión de 64 bites, se descarga el ejecutable:

Ejecutable Microsoft Mathematics: https://www.microsoft.com/es-co/download/details.aspx?id=15702

La instalación del programa se hace de manera habitual, seleccionando la carpeta de destino, aceptando términos y condiciones y dando clic en la opción instalar. Al final aparece un icono en el escritorio y en la lista de programas que permite abrir la aplicación.

INFORMACIÓN DEL AUTOR

Andrés Mauricio Grisales Aguirre

Matemático y MSc en Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Actualmente se desempeña como docente de tiempo completo en el área de Ciencias Básicas en la Universidad Católica Luis Amigó, regional Manizales, adscrito en esta sede a la Facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables, donde se desempeña como docente en el área de matemáticas, estadística e investigación.

Es integrante de los grupos de investigación Sistemas de Información y Sociedad del Conocimiento (SISCO) de la Universidad Católica Luis Amigó y del grupo Biotecnología, Seguridad Alimentaria y Nutricional (BIOSAN) del Sena Regional Caldas.

En la sede regional de la Universidad Católica Luis Amigó, ha venido liderando desde el 2016 el semillero de investigación Educación Matemática y TIC en el programa de Administración de Empresas, donde se desarrolla el proyecto *Análisis del impacto de las crisis económicas mundiales en el sector económico del departamento de Caldas*, que tiene como fin utilizar herramientas de estadística inferencial para el análisis de ciclos económicos y la incorporación de recursos TIC a procesos de investigación.

Ha participado en proyectos como *desarrollo de herramientas interactivas para el fortalecimiento de las competencias básicas en matemáticas (2015–2016), análisis comparativo de las economías latinoamericanas, caso Argentina, Venezuela, Ecuador y Colombia (2014) y evolución histórica de la geometría y su impacto en la sociedad del conocimiento (2014).*

Su experiencia laboral ha estado enmarcada en el campo de la enseñanza donde ha abarcado desde la educación básica secundaria en cursos de matemáticas y física, hasta la formación en matemáticas en carreras universitarias.

Este texto se ha escrito con la intención de brindarles a los estudiantes de primer semestre de cualquier programa de pregrado, una guía para el desarrollo de los cursos de matemáticas básicas o fundamentales.

Si bien la disponibilidad de material en esta asignatura ha ido aumentando en los últimos años, se ha considerado pertinente por parte del autor hacer una recopilación de los temas básicos que un estudiante de pregrado debe conocer en el área de matemáticas y que lo preparen para el desarrollo de cursos posteriores, no solo en la misma línea de esta asignatura, sino también en aquellos cursos donde esta es una herramienta fundamental para su desarrollo, tales como economía, contabilidad, matemática financiera y cursos de ingeniería.

La intención principal ha sido mostrar estos elementos, explicados de la manera más sencilla posible de modo que los estudiantes puedan seguirle el hilo al desarrollo de las temáticas, puedan solucionar los ejercicios propuestos y abordar con seguridad el estudio de textos más complejos en su área o disciplina de estudio.

UNIVERSIDAD CATÓLICA LUISAMIGÓ
Fondo Editorial Universidad Católica Luis Amigó